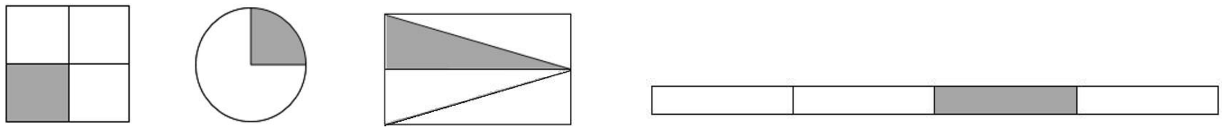
Nombres en écriture fractionnaire - Pourcentages

Automatismes

6. L'élève sait reconnaître une fraction sur des représentations variées, par exemple :

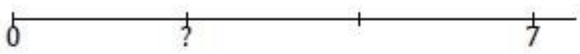


7. L'élève connaît des relations entre $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ et 1, et complète de manière automatique des « égalités à trous » du type :
$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\cdots$; $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\cdots$; $1-\frac{1}{4}=\cdots$; $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\cdots$; $1-\frac{1}{2}=\cdots$; $\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=\cdots$; $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\cdots$; $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\cdots$
8. L'élève sait passer de manière automatique d'une écriture fractionnaire à une écriture décimale, et inversement, dans les cas suivants :
$$\frac{1}{4}=0{,}25\ ;\ \frac{1}{2}=0{,}5\ ;\ \frac{3}{4}=0{,}75\ ;\ \frac{3}{2}=1{,}5\ ;\ \frac{4}{2}=2\ ;\ \frac{5}{2}=2{,}5$$
9. Les notions de diviseur et de multiple et les tables de multiplication sont réactivées en vue de leur utilisation dans le calcul sur les fractions (simplification, addition et soustraction).
10. L'élève sait calculer $\frac{2}{3}$ de 12 œufs, $\frac{3}{4}$ de 10 m.

Objectifs d'apprentissage	**Exemples de réussite**
• Associer et utiliser différentes écritures d'un nombre décimal : fraction, nombre mixte.	Dans le cadre d'une fraction supérieure à 1, il utilise l'écriture sous forme de nombre mixte, somme d'un nombre entier et d'une fraction inférieure à 1. Par exemple, il sait que : $\frac{6}{5} = 6 \times \frac{1}{5} = 5 \times \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = 1 + \frac{1}{5} = \frac{12}{10} = 1{,}2$. L'élève est sensibilisé au choix d'une ou de plusieurs écritures adaptées à une situation donnée, que ce soit dans le cadre d'une opération à effectuer ou d'un problème à résoudre.

Le sens quotient d'une fraction

Objectifs d'apprentissage	**Exemples de réussite**
• Relier une fraction au résultat exact de la division de son numérateur par son dénominateur.	L'élève constate que la fraction $\frac{a}{b}$ est égale au résultat, de la division de l'entier a par l'entier b non nul dans des cas particuliers : ► lorsque a est un multiple de b ; ► lorsque $a \div b$ est un nombre décimal non entier. Par exemple, il sait que $\frac{3}{4} = 0{,}75$ et constate que $3 \div 4 = 0{,}75$ en posant la division décimale de 3 par 4. Il interprète alors la fraction $\frac{3}{4}$ comme le quart de 3. L'élève apprend que, pour tout entier a et tout entier b non nul, la fraction $\frac{a}{b}$ est le résultat exact de la division de a par b. Le cas particulier $b = 1$ est explicité. L'élève sait que $\frac{a}{1} = a \div 1 = a$.
• Comprendre et connaitre la définition du quotient d'un entier a par un entier b non nul.	L'élève constate que $b \times \frac{a}{b} = a$ dans des cas particuliers : ► lorsque a est un multiple de b ;

• Compléter des égalités à trou multiplicatives.	► lorsque $\frac{a}{b}$ est un nombre décimal non entier. L'égalité $\frac{a}{b} = a \div b$ et le fait que la multiplication est l'opération inverse de la division permettent d'institutionnaliser le résultat et de le verbaliser sous la forme « Le quotient de a par b est le nombre qui, multiplié par b, donne a ». La commutativité du produit d'un entier par une fraction, justifiée par son interprétation comme aire d'un rectangle, permet d'écrire $b \times \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \times b = a$. L'élève utilise la notion de quotient et la propriété de commutativité pour compléter des égalités à trou des types : $b \times \ldots = a$; $\ldots \times b = a$, où a est un entier et b un entier non nul. Il importe de proposer aux élèves des égalités à trou leur permettant de comprendre que, dans certains cas, l'écriture fractionnaire est la seule manière de représenter le nombre manquant.
• Placer une fraction sur une demi-droite graduée dans des cas simples. • Graduer un segment de longueur donnée.	L'élève sait placer la fraction $\frac{a}{b}$ sur une demi-droite dont la graduation est adaptée. Par exemple, il détermine l'abscisse inconnue sachant que les graduations sont régulièrement espacées.  Selon la graduation souhaitée, l'élève sait effectuer des pliages d'une bande de papier (en 2, 4 ou 8) ou utiliser un guide-âne pour graduer un segment de longueur donnée. Il écrit la valeur de chaque graduation sous forme fractionnaire.
• Savoir que la fraction $\frac{a}{b}$ peut représenter un nombre entier, un nombre décimal non entier ou un nombre non décimal.	L'élève connait quelques fractions qui représentent des nombres non décimaux. En lien avec le domaine « Géométrie », il admet que le nombre π ne peut pas s'écrire sous la forme d'une fraction.

La fraction comme opérateur multiplicatif

Objectifs d'apprentissage	**Exemples de réussite**
• Utiliser une multiplication pour appliquer une fraction à un nombre entier.	En début d'apprentissage, l'élève verbalise des calculs du type : $\frac{2}{5}$ de 60, c'est 2 cinquièmes de 60, c'est-à-dire 2 fois un cinquième de 60, c'est-à-dire 2 fois $\frac{60}{5}$; ainsi : $\frac{2}{5} \times 60 = 2 \times \frac{60}{5} = 2 \times 12 = 24$. Ou : $\frac{5}{4}$ de 3, c'est 5 quarts de 3, c'est-à-dire 5 fois un quart de 3, c'est-à-dire 5 fois $\frac{3}{4}$, soit $5 \times \frac{3}{4} = \frac{3 \times 5}{4} = \frac{15}{4}$. Le professeur peut, selon des besoins des élèves, faire apparaitre sur des exemples du type précédent que pour a, b, c (non nul), « $\frac{b}{c}$ de a » est égal à $\frac{b}{c} \times a$ et à $a \times \frac{b}{c}$ qui est aussi égal à $\frac{b \times a}{c}$ et à $b \times \frac{a}{c}$. Le résultat est institutionnalisé sous la forme : « Pour calculer une fraction d'un nombre entier, on multiplie la fraction par le nombre ». L'élève est fortement encouragé, avant d'effectuer la multiplication, à simplifier la fraction $\frac{a}{c}$, notamment quand c'est un nombre entier, comme pour le calcul de $\frac{2}{5}$ de 60.

Comparer des fractions

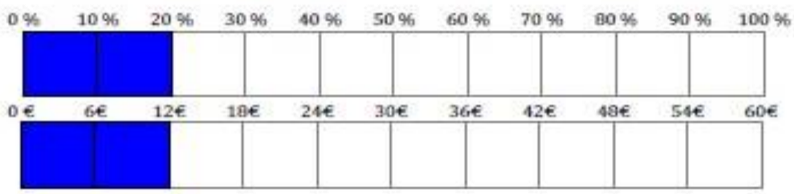
Objectifs d'apprentissage	Exemples de réussite
• Établir des égalités de fractions.	L'élève sait, par exemple, justifier pourquoi $\frac{7}{3}$ est égal $\frac{14}{6}$, en s'appuyant sur une représentation de chacune de ces fractions ou en comparant leur placement sur deux demi-droites graduées, l'une en tiers et l'autre en sixièmes de la même unité. Le résultat est institutionnalisé sous la forme « Le nombre représenté par une fraction ne change pas quand on multiplie ou quand on divise le numérateur et le dénominateur de celle-ci par un même nombre non nul ». L'élève sait, par exemple, répondre à la question suivante, en justifiant sa réponse : « Parmi les fractions $\frac{4}{7}, \frac{35}{20}, \frac{15}{18}, \frac{70}{40}, \frac{21}{28}$, quelles sont celles qui sont égales à $\frac{7}{4}$? ». L'élève sait compléter des égalités du type : $\frac{2}{3} = \frac{\dots}{9}$ ou $\frac{4}{7} = \frac{28}{\dots}$ L'automatisation des tables de multiplication est mobilisée à cette occasion.
• Comparer et encadrer des fractions. • Ordonner une liste de nombres écrits sous forme de fractions ou de nombres mixtes.	L'élève sait comparer deux fractions de même dénominateur. L'élève sait comparer deux fractions de même numérateur. Il sait comparer une fraction à 1 de manière automatique et utilise ce moyen pour comparer certaines fractions comme, par exemple, $\frac{7}{8}$ et $\frac{10}{9}$. Il compare certaines fractions à $\frac{1}{2}$ comme, par exemple $\frac{5}{12}$ et $\frac{6}{11}$. L'élève sait encadrer une fraction par deux entiers consécutifs, notamment à l'aide de son écriture sous forme de nombre mixte. Il sait, par exemple, ordonner dans l'ordre croissant une liste de nombres comme : $1, \frac{5}{3}, \frac{7}{6}, \frac{99}{100}, 1+\frac{1}{3}$.

Effectuer des opérations sur les fractions

Objectifs d'apprentissage	Exemples de réussite
• Additionner et soustraire des fractions. • Multiplier une fraction par un nombre entier.	L'élève sait additionner et soustraire des fractions de même dénominateur ou de dénominateurs multiples l'un de l'autre. Il sait additionner et soustraire des fractions de dénominateurs quelconques dans des cas simples. Par exemple, il sait calculer : $\frac{5}{4}+\frac{2}{3}$; $\frac{7}{2}-\frac{3}{5}$ L'élève sait calculer le produit d'une fraction par un nombre entier, et connait sa propriété de commutativité.
• Résoudre des problèmes mettant en jeu des fractions. • Inventer des problèmes mettant en jeu des fractions.	Par exemple, l'élève sait résoudre le problème suivant : « Mia a découpé son gâteau d'anniversaire en parts de différentes tailles. Leïla choisit une part égale au quart du gâteau et Léo choisit une part égale au sixième du gâteau. Quelle fraction du gâteau reste-t-il pour les autres invités ? » Par exemple, l'élève invente un problème dont la résolution nécessite le calcul de $\frac{2}{5}+\frac{3}{10}$ suivi de la soustraction de son choix.

Objectifs d'apprentissage	**Exemples de réussite**
• Connaitre la définition d'un pourcentage • Associer et utiliser différentes écritures d'un nombre décimal : pourcentage.	Par définition, si a est un entier naturel, a % est égal à $\frac{a}{100}$. On se limite à l'utilisation de pourcentages compris entre 0 % et 100 %, qui servent à exprimer des proportions et des probabilités. L'élève sait qu'un même nombre admet plusieurs écritures. ► 25 % = $\frac{25}{100}$ = 0,25 = $\frac{1}{4}$; 35 % = $\frac{35}{100}$ = 0,35 = $\frac{7}{20}$; L'élève est sensibilisé au choix d'une ou de plusieurs écritures adaptées à une situation donnée, que ce soit dans le cadre d'une opération à effectuer ou d'un problème à résoudre.

Pourcentages

Objectifs d'apprentissage	**Exemples de réussite**
• Comprendre le sens d'un pourcentage. • Calculer une proportion (rapport entre une partie et le tout) et l'exprimer sous forme de pourcentage dans des cas simples. • Appliquer un pourcentage à une grandeur ou à un nombre.	L'élève s'appuie sur la verbalisation pour comprendre le sens d'un pourcentage, en lien avec la proportionnalité. Par exemple, il sait que, si un aliment contient 42 % de glucides, alors « pour 100 g » de cet aliment, il y a 42 g de glucides. Il en déduit que 200 g de cet aliment contiennent 84 g de glucides et que 50 g de cet aliment en contiennent 21 g. L'élève sait calculer une proportion et l'exprimer sous forme de pourcentage dans le cas où le dénominateur est un diviseur ou un multiple de 100. Il sait, par exemple, calculer le pourcentage de boules blanches dans un sac contenant 2 boules blanches et 8 boules noires et l'exprimer en pourcentage. Il sait, par exemple, exprimer en pourcentage la proportion d'élèves demi-pensionnaires dans un collège de 400 élèves dont 120 sont demi-pensionnaires. L'élève sait qu'une proportion est toujours inférieure ou égale à 1. a % ayant été défini comme une nouvelle écriture de la fraction $\frac{a}{100}$, l'application d'un pourcentage à un nombre est un cas particulier de l'application d'une fraction à un nombre. Ainsi, l'élève sait que, pour déterminer a % d'un nombre entier c, on calcule $\frac{a}{100}$ × c. Les élèves qui en ont besoin peuvent utiliser, en début d'apprentissage, une échelle de pourcentage pour calculer un pourcentage simple d'une grandeur. Par exemple, pour calculer 20 % de 60 € : 

Prolongements possibles : mises en perspective historiques et culturelles

L'élève découvre les contextes historiques (impôt, héritage, cadastre) qui ont conduit à la notion de fraction ainsi que leurs différentes écritures avant l'utilisation de la barre de fraction.

Il comprend pourquoi une fraction a été appelée nombre rompu, nombre cassé ou encore nombre coupé.

Introduction : Si l'on divise 1 par 3, la calculatrice donne 0,333333333 or si l'on multiplie 0,333333333 par 3, cela donne 0,999999999 et non 1, d'où la nécessité d'introduire un nouveau nombre : $\frac{1}{3}$

I. Fraction - nombre

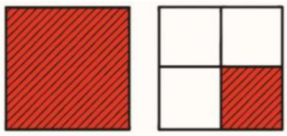
S1 + S2

- Définition : Pour tous nombres a et b entiers (avec $b \neq 0$), le nombre $\frac{a}{b}$ s'appelle une fraction.
  a est le numérateur
  b est le dénominateur
  Si a et b sont des nombres décimaux, on dit que $\frac{a}{b}$ est une écriture fractionnaire.

- Exemple et vocabulaire : $\frac{3}{4}$ est une fraction et $\frac{2,8}{1,15}$ est une écriture fractionnaire.

- Remarques : **Attention, ces remarques sont importantes.**

  - Une fraction représente un partage.
    - Exemple : Si un carré représente une unité alors pour représenter $\frac{5}{4}$ on a besoin de 2 carrés **donc** $\mathbf{\frac{5}{4} = 5 \times \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4}}$



  - Une fraction est un nombre qui est le quotient du numérateur par le dénominateur. Ce nombre peut avoir, dans certains cas mais pas toujours, une écriture décimale.
    - Exemple : $\frac{3}{4} = 3 \div 4 = 0,75$. On peut écrire $\frac{3}{4}$ en écriture décimale : c'est 0,75.
      $\frac{7}{1} = 7$
      $\frac{1}{3} = 1 \div 3 \approx 0,33$. On ne peut pas écrire $\frac{1}{3}$ en écriture décimale car elle est infinie. On utilise donc une valeur approchée.

- *Exercices du livre* : Partages : 9 à 20 p 91 et 92

  Vocabulaire et notion de nombre : 1 à 8 p 91 + 27 à 36 p 93 et 94

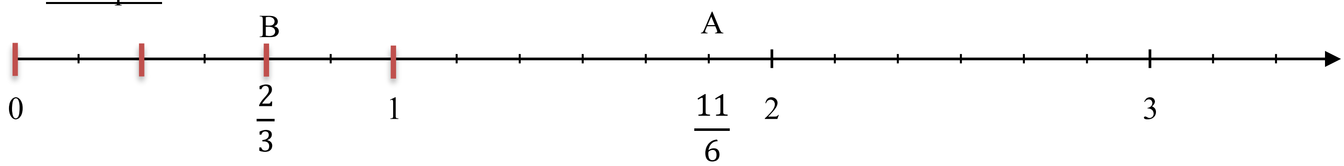
II. Fraction et droite graduée

Introduction : 18 p 34 (Manuel iParcours) ou 2 p 84

S3 + S4

- Méthode pour placer une fraction sur une droite graduée :
  Pour placer une fraction sur une droite graduée,
  - On regarde d'abord le dénominateur qui représente le nombre de parties égales qui composent chaque unité.
  - On place la fraction à l'aide du numérateur, qui représente le nombre de graduations du dénominateur comptées depuis l'origine.

- Exemples :



  - Le point A a pour abscisse $\frac{11}{6}$ car chaque unité est partagée en 6 parts égales (petites graduations noires) et A est à la 11ème graduation noire en partant de O.
  - Le point B a pour abscisse $\frac{2}{3}$ car en partageant chaque unité en 3 parts égales (graduations rouges), le point B est situé à la 2ème graduation rouge en partant de O.

- Remarques :
  - En observant la droite graduée, on peut remarquer que $\frac{11}{6} = 1 + \frac{5}{6}$. En effet, $\frac{11}{6}$ est situé sur la 5[ème] graduation après 1. On justifiera pourquoi cette égalité est vraie plus tard.
  - $1 = \frac{6}{6} = \frac{3}{3}$ et $2 = \frac{12}{6} = \frac{6}{2}$, ce qui est normal car $\frac{6}{6} = 6 \div 6 = 1$ et $\frac{12}{6} = 12 \div 6 = 2$

- *Exercices du livre* : 31 à 38 p 36 (Manuel iParcours) + 38 à 47 p 94 et 95

Activité : Fiche

S5

III. Fractions égales

Pour tous nombres a, b et c (b et c non nuls)

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c}}$$

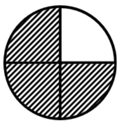
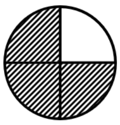
C'est-à-dire : On ne change pas la valeur d'un nombre en écriture fractionnaire si l'on multiplie (ou divise) son numérateur ET son dénominateur par un même nombre.

- Exemple : $\frac{1}{5} = \frac{1 \times 3}{5 \times 3} = \frac{5}{15}$ + Exemple avec des flèches.

- *Exercices du livre* : 48 à 59 p 95

S6
+
S7

IV. Addition de fractions

- Introduction : Quel est le résultat de  +  ? (Réponse : $\frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{6}{4}$).

  Même question avec $\frac{3}{4} + \frac{1}{8}$?

- Propriété : **Pour additionner ou soustraire des fractions, on les met au même dénominateur puis on additionne ou on soustrait les numérateurs.**

- Exemples :

$A = \frac{2}{5} + \frac{7}{5}$	$B = \frac{3}{7} - \frac{2}{7}$	$C = 1 + \frac{5}{6}$	$D = 4 - \frac{1}{3}$	$E = \frac{3}{5} + \frac{2}{10}$	$F = \frac{12}{21} - \frac{2}{7}$
$A = \frac{2+7}{5}$	$B = \frac{3-2}{7}$	$C = \frac{6}{6} + \frac{5}{6}$	$D = \frac{12}{3} - \frac{1}{3}$	$E = \frac{6}{10} + \frac{2}{10}$	$F = \frac{12}{21} - \frac{6}{21}$
$A = \frac{9}{5}$	$B = \frac{1}{7}$	$C = \frac{6+5}{6}$	$D = \frac{11}{3}$	$E = \frac{8}{10}$	$F = \frac{6}{21}$
		$C = \frac{11}{6}$			

- *Exercices du livre* : 82 à 96 p 97 et 98

S8
+
S9

V. Prendre une fraction d'une quantité

- Définition : Prendre une fraction d'une quantité revient à effectuer une multiplication.

- Exemples :
  - Prendre les $\frac{3}{4}$ de 100 g $\longrightarrow \frac{3}{4} \times 100$
  - Prendre les $\frac{2}{3}$ *de* 3 L $\longrightarrow \frac{2}{3} \times 3$
  - Prendre le dixième de 20 € $\longrightarrow \frac{1}{10} \times 20$

- **Méthodes de calcul :**

$$\frac{a}{b} \times b = a \quad \text{et} \quad \frac{a}{b} \times c = \frac{a \times c}{b}$$

- Exemples :
  - $\frac{2}{3}\, de\ 3\text{L} = \frac{2}{3} \times 3 = 2\text{L}$
  - $\frac{3}{4}\ de\ 100\ \text{g} = \frac{3}{4} \times 100 = \frac{3 \times 100}{4} = \frac{300}{4} = 75\text{g}$

- *Exercices du livre* : 97 à 116 p 98 et 99

S10

VI. Application aux pourcentages

- Définition : Un pourcentage est un nombre qui peut être assimilé à une fraction sur 100.

- Exemple : $15\% = \frac{15}{100} = 0{,}15$

- Quelques pourcentages à connaitre :

  - $\mathbf{50\% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2} = 0,5}$ **(la moitié)**
  - $\mathbf{25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} = 0,25}$ **(le quart)**
  - $\mathbf{75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4} = 0,75}$ **(les 3 quarts)**
  - $\mathbf{10\% = \frac{10}{100} = \frac{1}{10} = 0,1}$ **(le dixième)**

- *Exercices du livre* : 70 à 80 p 117 et 89 p 118

S11

- Méthode : A l'aide du paragraphe précédent, on peut ainsi calculer des pourcentages de quantités.

- Exemple : Dans un pot de 250 g de crème fraiche, il y a 30% de matière grasse. Si on veut calculer la quantité de matière grasse contenue dans le pot, on doit calculer :

  $30\% \times 250 = \frac{30}{100} \times 250 = (30 \times 250) \div 100 = 7500 \div 100 = 75\ \text{g}$
  Il y a donc 75 g de matière grasse dans le pot de 250 g.

- *Exercices du livre* : 81 à 88 p 118 + 90 à 106 p 119 et 120
