Identités remarquables

Ce que sait faire l'élève	Exemple de réussite	Repères annuels de progression
• Il factorise une expression du type $a^2 - b^2$ et développe des expression du type $(a+b)(a-b)$. • Il résout algébriquement différents types d'équations : – Équation s'y ramenant (équations produits) ; – Équations de la forme $x^2 = a$ sur des exemples simples.	♦ Il factorise $x^2 - 64$; $4x^2 - 49$ et développe $(x+6)(x-6)$; $(2x-5)(2x+5)$ en question flash. ♦ Il factorise : $5a + 15b$; $12x^2 - 15x$; $16x^2 - 144$; $x^2 - 13$. ♦ Il résout les équations suivantes : $(2{,}5x - 7)(8x - 9{,}6) = 0$; $x^2 = 20$ ♦ Détermine à l'aide d'une équation : – les antécédents de 0 par la fonction g définie par $g(x) = (3x + 6)(x - 9)$.	La factorisation d'une expression du type $a^2 - b^2$ permet de résoudre des équations produits se ramenant au premier degré (notamment des équations du type $x^2 = a$ en lien avec la racine carrée). Aucune virtuosité calculatoire n'est attendue dans les développements et les factorisations.

Introduction : Activité sur le carré

I. Les identités remarquables

Pour tous nombres réels a et b,

S1 + S2

$$\boldsymbol{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$
$$\boldsymbol{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$
$$\boldsymbol{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$$

II. Développer avec les identités remarquables

Pour chaque cas, on identifie l'identité utilisée, puis a et b.

- Exemples :
  $A = (2x+7)^2$ C'est la 1ère I. R. $a = 2x$ et $b = 7$
  $A = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 7 + 7^2$
  $A = 4x^2 + 28x + 49$

  $B = (8x-9)^2$ C'est la 2ème I. R. $a = 8x$ et $b = 9$
  $B = (8x)^2 - 2 \times (8x) \times 9 + 9^2$
  $B = 64x^2 - 144x + 81$

  $C = (3x-5)(3x+5)$ C'est la 3ème I. R. $a = 3x$ et $b = 5$
  $C = (3x)^2 - 5^2$
  $C = 9x^2 - 25$

  (Si besoin $D = (-2x-4)^2$ ou $E = (-3x+5)^2$)

- *Exercices du manuel* : 20 à 25 p 36 – 33 à 37 p 37

S3

III. Factoriser

1. Avec un facteur commun

- Rappels :
  Pour tous nombres réels k, a et b :
  $$\boldsymbol{ka + kb = k(a+b)}$$
  $$\boldsymbol{ka - kb = k(a-b)}$$

- Exemples : La partie surlignée est le facteur commun
  $5\boldsymbol{x} + 4\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(5+4)$
  $3a + 3 = \boldsymbol{3}a + \boldsymbol{3} \times 1 = \boldsymbol{3}(a+1)$
  $8a + 12 = \boldsymbol{4} \times 2a + \boldsymbol{4} \times 3 = \boldsymbol{4}(2a+3)$

  $$\begin{aligned} \boldsymbol{5x}(2x+3) + \boldsymbol{5x}(x-1) &= \boldsymbol{5x}[(2x+3)+(x-1)] \\ &= 5x(2x+3+x-1) \\ &= 5x(3x+2) \end{aligned}$$

  $$\begin{aligned} \boldsymbol{(3x-5)}(2x-1) - (x+4)\boldsymbol{(3x-5)} &= \boldsymbol{(3x-5)}[(2x-1)-(x+4)] \\ &= (3x-5)(2x-1-x-4) \\ &= (3x-5)(x-5) \end{aligned}$$

- *Exercices du manuel* : 40 p 37 – 41 p 38 – 47 p 38

S4

2. Avec les identités remarquables

Pour chaque cas, on identifie l'identité utilisée, puis a et b avant de factoriser

- Exemples :
  $A = 4x^2 + 4x + 1$ C'est la 1ère I. R. $a = 2x$ et $b = 1$
  $A = (2x+1)^2$

  $B = 9x^2 - 100$ C'est la 3ème I. R. $a = 3x$ et $b = 10$
  $B = (3x+10)(3x-10)$

- *Exercices du manuel* : 42 à 46 p 38 – 48 p 38

Introduction : Résoudre l'équation $xy = 0$

S5

IV. Equations produit

- Propriété : **Un produit de facteurs est nul si au moins l'un des facteurs est nul.**

- Exemples : Résoudre l'équation : $(5x+2)(2x-1) = 0$
  Un produit de facteurs est nul si au moins l'un des facteurs est nul.

$5x + 2 = 0$	$2x - 1 = 0$
$5x = -2$	$2x = 1$
$x = -\dfrac{2}{5}$	$x = \dfrac{1}{2}$

  L'équation a donc 2 solutions : $-\frac{2}{5}$ et $\frac{1}{2}$

- *Exercices du manuel* : 76 à 80 p 41

S5

- Application : **Résolution d'équations du type $x^2 = a$ pour $a > 0$**

- Exemples :

a) Résoudre $x^2 = -2$. C'est impossible car un carré est toujours positif.

b) Résoudre $x^2 = 5$

On a alors $x^2 - 5 = 0$

$$x^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2 = 0$$

$$\left(x - \sqrt{5}\right)\left(x + \sqrt{5}\right) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si au moins un des facteurs est nul

$x - \sqrt{5} = 0$	$x + \sqrt{5} = 0$
$x = \sqrt{5}$	$x = -\sqrt{5}$

L'équation a donc 2 solutions : $\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$

- Propriété : **L'équation $x^2 = a$, pour $a \geq 0$ a deux solutions : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.**

- Exercices : 38 à 40 de la fiche (à adapter)

38 On veut résoudre l'équation : $9x^2 - 100 = 0$.

1) Factoriser l'expression $9x^2 - 100$.

2) En déduire les solutions de cette équation.

J'ai obtenu une équation produit nul.

39 Résoudre l'équation : $49 - 4x^2 = 0$.

40 On veut factoriser l'expression $E = 3x^2 - 1$.

1) a) Calculer $\left(\sqrt{3}x\right)^2$.

b) En déduire que E est une différence de deux carrés.

2) Factoriser l'expression E.
