Chapitre 2 - Théorème de Pythagore

C.1

Chaînons déductifs		
	Je sais	Le triangle ABC est rectangle en C
	J'utilise	D'après le théorème de Pythagore
	J'en déduis	$AB^2 = CA^2 + CB^2$

Calculs

$$\begin{aligned} AB^2 &= 6^2 + 1{,}1^2 \\ AB^2 &= 36 + 1{,}21 \\ AB^2 &= 37{,}21 \\ AB &= \sqrt{37{,}21} \\ AB &= 6{,}1 \end{aligned}$$

C.2

Chaînons déductifs		
	Je sais	Le triangle DEF est rectangle en D
	J'utilise	D'après le théorème de Pythagore
	J'en déduis	$EF^2 = DE^2 + DF^2$

Calculs

$$\begin{aligned} 5^2 &= DE^2 + 4{,}8^2 \\ 25 &= DE^2 + 23{,}04 \\ DE^2 &= 25 - 23{,}04 \\ DE^2 &= 1{,}96 \\ DE &= \sqrt{1{,}96} \\ DE &= 1{,}4 \end{aligned}$$

C.3

- Le triangle ABC est rectangle en A.
  Si un triangle est rectangle alors il vérifie l'égalité de Pythagore.
  On a la relation sur les carrés des longueurs :
  $BC^2 = AB^2 + AC^2$
  Par application numérique, on a :
  $$\begin{aligned} BC^2 &= 40^2 + 30^2 \\ BC^2 &= 1600 + 900 \\ BC^2 &= 2500 \\ BC &= \sqrt{2500} = 50\,km \end{aligned}$$
- Le triangle DEF est rectangle en E.
  Si un triangle est rectangle alors il vérifie l'égalité de Pythagore.
  On a la relation :
  $DF^2 = ED^2 + EF^2$
  Par application numérique, on a :
  $$\begin{aligned} 13^2 &= 12^2 + EF^2 \\ 169 &= 144 + EF^2 \\ 169 - 144 &= EF^2 \\ EF^2 &= 25 \\ EF &= \sqrt{25} = 5\,cm \end{aligned}$$
- Le triangle GHI n'étant pas rectangle, nous ne disposons pas d'informations suffisantes pour déterminer la mesure du côté $[GH]$.

C.4

- Le triangle ABC est rectangle en B.
  Si un triangle est rectangle alors il vérifie l'égalité de Pythagore.
  On a la relation :
  $AC^2 = BA^2 + BC^2$
  On a l'application numérique suivante :
  $$\begin{aligned} AC^2 &= 24^2 + 32^2 \\ AC^2 &= 576 + 1024 \\ AC^2 &= 1600 \\ AC &= \sqrt{1600} = 40\,m \end{aligned}$$
- Le triangle DEF est rectangle en F.
  Si un triangle est rectangle alors il vérifie l'égalité de Pythagore.
  On a la relation :
  $DE^2 = FE^2 + FD^2$
  On a l'application numérique :
  $$\begin{aligned} 75^2 &= FE^2 + 45^2 \\ 5625 &= FE^2 + 2025 \\ FE^2 &= 5625 - 2025 \\ FE^2 &= 3600 \\ FE &= \sqrt{3600} = 60\,m \end{aligned}$$

C.5

- Ne sachant pas si le triangle ABC est rectangle ou non, on ne peut affirmer que le triangle ABC vérifie l'égalité de Pythagore ou pas.
  N'ayant aucune relation sur les longueurs, on ne peut pas déterminer la longueur AB.
- Le triangle DEF est rectangle en E.
  Si un triangle est rectangle alors il vérifie l'égalité de Pythagore.
  On a la relation suivante :

$$DF^2 = ED^2 + EF^2$$

Par application numérique, on a :

$$7{,}5^2 = 7{,}2^2 + EF^2$$
$$56{,}25 = 51{,}84 + EF^2$$
$$56{,}25 - 51{,}84 = EF^2$$
$$EF^2 = 4{,}41$$
$$EF = \sqrt{4{,}41} = 2{,}1\,cm$$

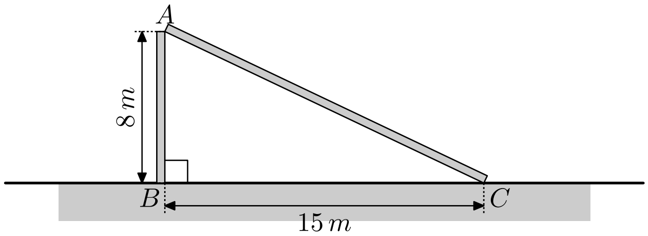
C.6 Le triangle DEF est rectangle en E.
Si un triangle est rectangle alors il vérifie l'égalité de Pythagore.
On a la relation

$$DF^2 = ED^2 + EF^2$$

On a l'application numérique suivante :

$$DF^2 = 6^2 + 6{,}3^2$$
$$DF^2 = 36 + 39{,}69$$
$$DF^2 = 75{,}69$$
$$DF = \sqrt{75{,}69} = 8{,}7\,cm$$

C.7 On considère les trois points ci-dessous indiquant les extrémités du poteau brisé :



Le triangle ABC est rectangle en A.
D'après le théorème de Pythagore, on a l'égalité :

$$AC^2 = BA^2 + BC^2$$
$$AC^2 = 8^2 + 15^2$$
$$AC^2 = 64 + 225$$
$$AC^2 = 289$$
$$AC = 17\,m$$

Lorsqu'il était redressé, le poteau mesurait :

$$8 + 17 = 25\,m$$

C.8

a Le triangle ABC est rectangle en B.
Si un triangle est rectangle alors il vérifie l'égalité de Pythagore.
On a la relation :

$$AC^2 = BA^2 + BC^2$$

Par application numérique, on a :

$$15^2 = BA^2 + 4^2$$
$$225 = BA^2 + 16$$
$$225 - 16 = BA^2$$
$$BA^2 = 209$$
$$BA = \sqrt{209} \approx 14{,}5\,cm$$

b Le triangle ABC est rectangle en C.
Si un triangle est rectangle alors il vérifie l'égalité de Pythagore.
On a la relation :

$$AB^2 = CA^2 + CB^2$$

Par application numérique, on a :

$$AB^2 = 1^2 + 1^2$$
$$AB = 2$$
$$AB = \sqrt{2} \approx 1{,}4\,cm$$

C.9 Commençons par déterminer la longueur du segment $[BE]$ avant de déterminer le périmètre du polygone $ABECD$:

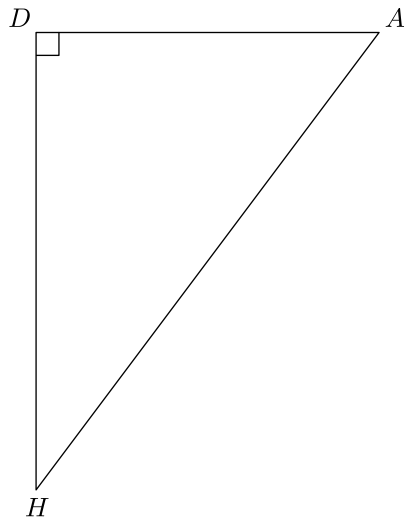
- Le triangle BCE est un triangle rectangle en C.
  Si un triangle est rectangle alors il vérifie l'égalité de Pythagore.
  On a la relation :
  $$CB^2 + CE^2 = BE^2$$
  Par application numérique, on a :
  $$30^2 + 30^2 = BE^2$$
  $$BE^2 = 900 + 900$$
  $$BE^2 = 1800$$
  $$BE = \sqrt{1800} \approx 42\,m$$
  Ainsi, le périmètre de son champ est :
  $$\mathcal{P} = AB + BE + ED + DA = 30 + 42 + 60 + 30 = 162\,m$$
- Ce champ est composé d'un carré et d'un triangle rectangle :
  - Le carré a pour aire :
    $$\mathcal{A}_{ABCD} = x^2 = 30^2 = 900\,m^2$$
  - Dans le triangle BCE, les deux côtés de l'angle droite mesurent $30\,m$. Ce triangle a pour aire :
    $$\mathcal{A}_{BCE} = \frac{30\times30}{2} = \frac{900}{2} = 450\,m^2$$

  Ainsi, ce champ a pour aire : $\mathcal{A} = 900 + 450 = 1350\,m^2$

C.10

1 a Le triangle ADH est un triangle rectangle en D.

b Voici la représentation du triangle ADH en vraie grandeur :

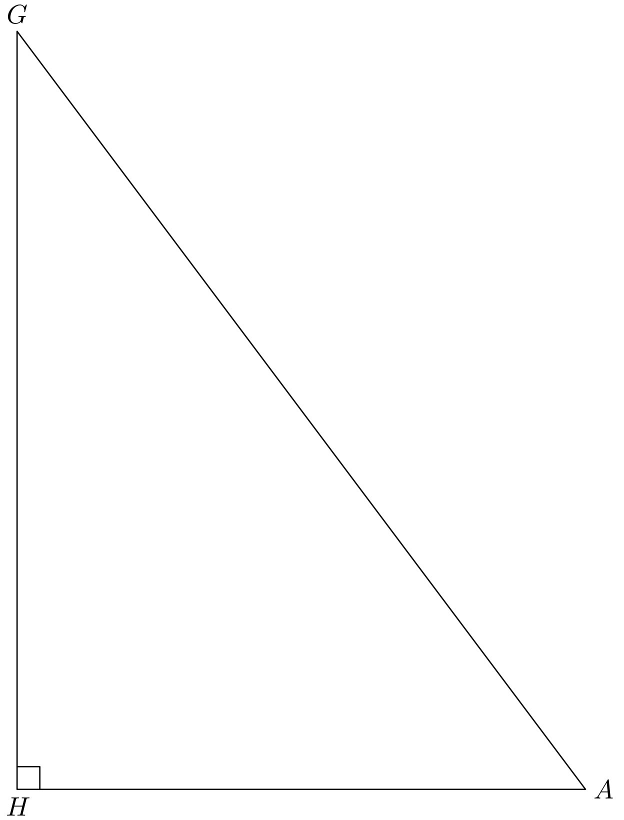


c Dans le triangle ADH est rectangle en D, on a d'après le théorème de Pythagore la relation suivante :

$AH^2 = DA^2 + DH^2$
$AH^2 = 4{,}5^2 + 6^2$
$AH^2 = 20{,}25 + 36$
$AH^2 = 56{,}25$
$AH^2 = 56{,}25$
$AH = \sqrt{56{,}25}$
$AH = 7{,}5\,cm$

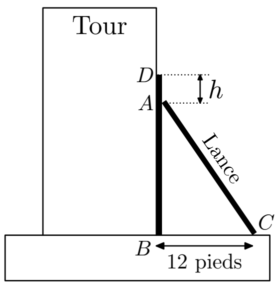
(2) (a) Le triangle AHG est un triangle rectangle en H.

(b) Voici la représentation du triangle AHG en vraie grandeur :



(c) Dans le triangle AHG rectangle en H, on a d'après le théorème de Pythagore la relation suivante :
$AG^2 = HA^2 + HG^2$
$AG^2 = 56{,}25 + 10^2$
$AG^2 = 56{,}25 + 100$
$AG^2 = 156{,}25$
$AG = \sqrt{156{,}25}$
$AG = 12{,}5\,cm$

C.11 Utilisons les points A, B et C représentés dans la figure ci-dessous :



Le triangle ABC est un triangle rectangle en B.
Si un triangle est rectangle alors il vérifie la propriété de Pythagore.

On en déduit l'égalité des carrés des longueurs :
$AC^2 = BA^2 + BC^2$
$20^2 = BA^2 + 12^2$
$400 = BA^2 + 144$
$BA^2 = 400 - 144$
$BA^2 = 256$
$BA = \sqrt{256} = 16\,\text{pieds}$

Le point A étant un point du segment $[DB]$, on a l'égalité de longueurs :
$DB = DA + AB$
$20 = DA + 16$
$DA = 20 - 16$
$DA = 4\,\text{pieds}$

Donc, la lance est descendue d'environ 4 pieds, correspondant à envion $120\,cm$.

C.12 Voici le calcul et le chaînon déductif complétés :

Calculs	$AB^2 = 225$	$AC^2 = 81$	$BC^2 = 144$

Chaînon déductif		
	Je sais	Les longueurs du triangle ABC vérifient l'égalité de Pythagore car : $AB^2 = CA^2 + CB^2$
	J'utilise	D'après la réciproque du théorème de Pythagore
	J'en déduis	Le triangle ABC est rectangle en C

C.13 Voici les calculs et les chaînons déductifs :

Calculs	$AB^2 = 16{,}81$	$AC^2 = 0{,}81$	$BC^2 = 16$

Chaînon déductif		
	Je sais	Les longueurs du triangle ABC vérifient l'égalité de Pythagore car : $AB^2 = CA^2 + CB^2$
	J'utilise	D'après la réciproque du théorème de Pythagore
	J'en déduis	Le triangle ABC est rectangle en C

C.14
- Dans le triangle ABC, on a :
$AB^2 = 2{,}9^2 = 8{,}41$; $AC^2 = 2{,}1^2 = 4{,}41$; $BC^2 = 2^2 = 4$
On remarque l'égalité suivante : $AB^2 = CA^2 + CB^2$

  Le triangle ABC vérifie l'égalité de Pythagore.
  D'après la réciproque du théorème de Pythagore, on en déduit que le triangle ABC est rectangle en C.
- Dans le triangle rectangle DEF, on a :

$DF^2=7^2=49$; $DE^2=4{,}2^2=17{,}64$; $EF^2=5{,}6^2=31{,}36$
On remarque l'égalité suivante : $DF^2=ED^2+EF^2$

Le triangle DEF vérifie l'égalité de Pythagore.
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, on en déduit que le triangle DEF est rectangle en D.

C.15 On a les carrés des longueurs :
$FD^2=36$; $EF^2=39{,}69$; $DE^2=75{,}69$
On remarque la relation :
$75{,}69=36+39{,}69$
$DE^2=FD^2+FE^2$
Le triangle DEF vérifie l'égalité de Pythagore.
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, on en déduit que le triangle DEF est rectangle en F.

C.16 On a les carrés des longueurs :
$FD^2=20{,}25$; $EF^2=36$; $DE^2=56{,}25$
On remarque l'égalité :
$56{,}25=20{,}25+36$
$DE^2=FD^2+FE^2$
Le triangle DEF vérifie l'égalité du théorème de Pythagore.
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, on en déduit que le triangle DEF est rectangle en F.

C.17
- **Pour le triangle ABC :**
  On a les carrés des longueurs :
  $AB^2=7{,}5^2=56{,}25$; $AC^2=5^2=25$; $BC^2=4{,}5^2=20{,}25$
  Ces trois nombres ne forment pas un triplet pythagoricien.

  Le triangle ABC ne vérifie pas l'égalité de Pythagore, on en déduit que le triangle ABC n'est pas un triangle rectangle.
- **Pour le triangle DEF :**
  On a les carrés des longueurs :
  $DF^2=17^2=289$; $ED^2=8^2=64$; $EF^2=15^2=225$
  On remarque l'égalité : $DF^2=ED^2+EF^2$

  Ainsi, le triangle DEF vérifie l'égalité de Pythagore.
  D'après la réciproque du théorème de Pythagore, on en déduit que le triangle DEF est rectangle en E.

C.18
1. - Le triangle ABE est rectangle en A.
   Si un triangle est rectangle alors il vérifie l'égalité de Pythagore.
   On a la relation :
   $BE^2=AB^2+AE^2$
   $BE^2=1{,}8^2+2{,}4^2$
   $BE^2=3{,}24+5{,}76$
   $BE^2=9$
   $BE=\sqrt{9}=3\,cm$
   - Le triangle BED est rectangle en B.
   Si un triangle est rectangle alors il vérifie l'égalité de Pythagore.
   On a la relation :
   $DE^2=BD^2+BE^2$
   $5^2=BD^2+3^2$
   $25=BD^2+9$
   $BD^2=25-9$
   $BD^2=16$
   $BD=\sqrt{16}=4\,cm$
2. Dans le triangle BDC, on a les carrés des longueurs :
   $BC^2=10{,}24$; $CD^2=5{,}76$; $BD^2=16$
   On remarque l'égalité suivante :
   $16=10{,}24+5{,}76$
   $BD^2=CB^2+CD^2$
   Le triangle BCD vérifie l'égalité de Pythagore.
   D'après la réciproque du théorème de Pythagore, on en déduit que le triangle BDC est rectangle en C.

C.19 On va démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle en deux étapes :
- On a les valeurs suivantes :
  $AD^2=3{,}9^2=15{,}21$; $CD^2=8^2=64$; $AC^2=8{,}9^2=79{,}21$
  On remarque l'égalité : $AC^2=DA^2+DC^2$

  Le triangle ACD vérifie l'égalité de Pythagore.
  D'après la réciproque du théorème de Pythagore, on en déduit que le triangle ADC est rectangle en D.
- $\widehat{ADC}=90^o$
  Si un parallélogramme possède un angle droit alors c'est un rectangle.
  On en déduit que le parallélogramme $ABCD$ est un rectangle.

C.20
1. $OB=OD$ et $OA=OC$.
   Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu alors c'est un parallélogramme.
   $ABCD$ est un parallélogramme.
2. Puisque les diagonales du quadrilatère $ABCD$ ne sont pas de même longueur alors $ABCD$ ne peut être un rectangle.
3. Dans le triangle OAB, on a les carrés des longueurs :
   $AB^2=110{,}25$; $AO^2=72{,}25$; $OB^2=36$
   Le plus grand côté du triangle est $[AB]$ et on remarque que : $AB^2\neq OA^2+OB^2$

   Le triangle OAB ne vérifie pas l'égalité de Pythagore :
   Si un triangle ne vérifie pas l'égalité de Pythagore, alors ce triangle n'est pas un triangle rectangle.
   ABO n'est pas un triangle rectangle.

   Le parallélogramme $ABCD$ n'est pas un losange car ses diagonales ne sont pas perpendiculaires : tout losange a ses diagonales perpendiculaires entre elles.

C.21
1. On a les carrés des longueurs suivantes :
   $AB^2=70{,}56$; $AC^2=196$; $BC^2=125{,}44$
   On remarque l'égalité :
   $196=70{,}56+125{,}44$
   $AC^2=BA^2+BC^2$
   Le triangle ABC vérifie l'égalité de Pythagore.
   D'après la réciproque du théorème de Pythagore, on en

déduit que le triangle ABC est un triangle rectangle en B.

2 a Le triangle ABC étant rectangle en B, les côtés $[AB]$ et $[AC]$, adjacents à l'angle droit, forment des bases et hauteurs respectives au triangle ABC. On a :

$$\mathcal{A} = \frac{b \times h}{2} = \frac{AB \times BC}{2}$$
$$= \frac{8{,}4 \times 11{,}2}{2} = \frac{94{,}08}{2} = 47{,}04\,cm^2$$

b La hauteur issue de B est le segment $[BH]$; la base associé à cette hauteur est le côté $[AC]$. La formule de l'aire d'un triangle permet d'écrire :

$$\mathcal{A} = \frac{AC \times BH}{2}$$

En utilisant la valeur de l'aire trouvée à la question précédente :

$$47{,}04 = \frac{14 \times BH}{2}$$
$$94{,}08 = 14 \times BH$$
$$BH = \frac{94{,}08}{14} \approx 6{,}72\,m$$

3 Le triangle BCH est un triangle rectangle en H.
Si un triangle est rectangle alors il vérifie l'égalité de Pythagore.
On en déduit l'égalité :

$$BC^2 = HB^2 + HC^2$$
$$11{,}2^2 = 6{,}72^2 + HC^2$$
$$125{,}44 = 45{,}1584 + HC^2$$
$$HC^2 = 125{,}44 - 45{,}1584$$
$$HC^2 = 80{,}2816$$
$$HC = \sqrt{80{,}2816} \approx 8{,}96\,m$$

C.22

1 a Le triangle EMA est rectangle en E.
D'après le théorème de Pythagore, on a l'égalité :

$$MA^2 = EM^2 + EA^2$$
$$MA^2 = 9^2 + 12^2$$
$$MA^2 = 81 + 144$$
$$MA^2 = 225$$
$$MA = \sqrt{225}$$
$$MA = 15\,m$$

b Le triangle ABC est rectangle en B.
D'après le théorème de Pythagore, on a l'égalité :

$$AC^2 = BA^2 + BC^2$$
$$AC^2 = 576 + 49$$
$$AC^2 = 625$$
$$AC = \sqrt{625}$$
$$AC = 25\,m$$

c
- Les faces $ABCD$ et $EFGH$ étant de dimensions identiques, on en déduit :
$$EG = AC = 25\,m$$
- Le point M appartenant au segment $[EG]$, on a :
$$EG = EM + MG$$
$$25 = 9 + MG$$
$$MG = 25 - 9$$
$$MG = 16\,m$$
- Le triangle MGC est rectangle en G.

D'après le théorème de Pythagore, on a l'égalité :

$$MC^2 = GM^2 + GC^2$$
$$MC^2 = 16^2 + 12^2$$
$$MC^2 = 256 + 144$$
$$MC^2 = 400$$
$$MC = \sqrt{400}$$
$$MC = 20\,m$$

2 On a les valeurs suivantes :
$MA^2 = 15^2 = 225$; $MC^2 = 20^2 = 400$; $AC^2 = 25^2 = 625$

On remarque qu'on a l'égalité : $AC^2 = MA^2 + MC^2$
Le triangle ACM vérifie l'égalité de Pythagore.
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, on en déduit que le triangle ACM est rectangle en M.

C.23

- **Déterminons la mesure du côté $[GI]$:**

Le quadrilatère $GHIJ$ est un rectangle.
Si un quadrilatère $GHIJ$ est un rectangle alors ses angles sont des angles droits.
$\widehat{GHI}$ est un angle droit.

Le triangle GHI est un triangle rectangle en H.
Si un triangle est rectangle alors il vérifie l'égalité de Pythagore.
On a la relation sur les carrés des longueurs :

$$GI^2 = HGGH^2 + HI^2$$
$$GI^2 = 5{,}6^2 + 3{,}3^2$$
$$GI^2 = 31{,}36 + 10{,}89$$
$$GI^2 = 42{,}25$$
$$GI = \sqrt{42{,}25} = 6{,}5\,cm$$

- **Vérifions si le triangle GIK vérifie l'égalité de Pythagore :**

On a les carrés des longueurs :
$GK^2 = 27{,}04$; $GI^2 = 42{,}25$; $IK^2 = 16$
Le plus grand des côtés du triangle GIK est $[GI]$ et on remarque que :
$$GI^2 \neq KG^2 + KI^2$$

Le triangle GIK ne vérifie pas l'égalité de Pythagore.
On en déduit que le triangle GIK n'est pas un triangle rectangle.