Chapitre 7 - Théorème de Thalès

C.1 On a : $B \in [AC]$; $D \in [AE]$; $(BD) /\!/ (CE)$

D'après le théorème de Thalès, on a :
$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} = \frac{BD}{CE}$$
Une application numérique nous donne :
$$\frac{AB}{AC} = \frac{4{,}2}{14} = \frac{BD}{12}$$
Le produit en croix nous donne :
$$4{,}2 \times 12 = 14 \times BD$$
$$BD = \frac{4{,}2 \times 12}{14} = 3{,}6\,cm$$

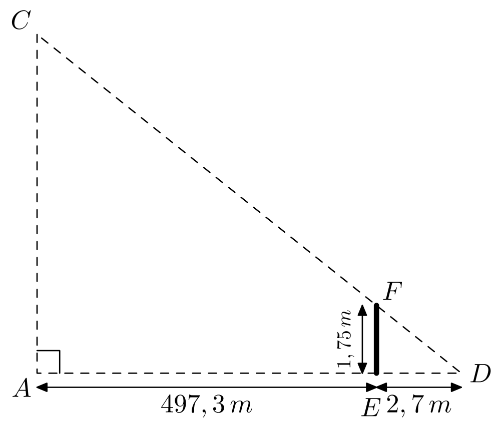
C.2 Dans le triangle DEF, on a les propriétés suivantes :
$R \in [DE]$; $S \in [DF]$; $(RS) /\!/ (EF)$.
D'après le théorème de Thalès, on a les égalités suivantes de rapports :
$$\frac{DR}{DE} = \frac{DS}{DF} = \frac{RS}{EF}$$
Par application numérique, on a :
$$\frac{2{,}1}{DE} = \frac{1{,}8}{4{,}2} = \frac{RS}{EF}$$
$$\frac{2{,}1}{DE} = \frac{1{,}8}{4{,}2}$$
Par utilisation du produit en croix, on a :
$$2{,}1 \times 4{,}2 = DE \times 1{,}8$$
$$DE = \frac{2{,}1 \times 4{,}2}{1{,}8}$$
$$DE = \frac{2{,}1 \times 4{,}2}{1{,}8}$$
$$DE = 4{,}9\,cm$$
Le point R appartient au segment $[DE]$; ainsi, on a l'égalité :
$$DE = DR + RE$$
$$4{,}9 = 2{,}1 + RE$$
$$ER = 4{,}9 - 2{,}1$$
$$ER = 2{,}8\,cm$$

C.3 Dans le triangle ABC, on a les propriétés suivantes :
$M \in [AB]$; $N \in [AC]$; $(MN) /\!/ (BC)$
D'après le théorème de Thalès, on a les égalités de rapports :
$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$
Par application numérique, on a :
$$\frac{3{,}6}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{2{,}4}{3}$$
$$\frac{3{,}6}{AB} = \frac{2{,}4}{3}$$
D'après le produit en croix, on a :
$$3{,}6 \times 3 = 2{,}4 \times AB$$
$$AB = \frac{3{,}6 \times 3}{2{,}4}$$
$$AB = 4{,}5\,cm$$
Le point M étant un point du segment $[AB]$, on a l'égalité :
$$AB = AM + MB$$
$$4{,}5 = 3{,}6 + MB$$
$$MB = 4{,}5 - 3{,}6$$
$$MB = 0{,}9\,cm$$

C.4 On a : $K \in [TM]$; $L \in [TN]$; $(KL) /\!/ (MN)$

D'après le théorème de Thalès, on a :
$$\frac{TK}{TM} = \frac{TL}{TN} = \frac{KL}{MN}$$
Une application numérique nous donne :
$$\frac{5}{12{,}5} = \frac{6{,}5}{TN} = \frac{KL}{MN}$$
Le produit en croix nous donne :
$$5 \times TN = 12{,}5 \times 6{,}5$$
$$TN = \frac{12{,}5 \times 6{,}5}{5} = 16{,}25\,cm$$

C.5 Voici le dessin schématisé qui nous permettra d'utiliser plus facilement les théorèmes mathématiques adéquats :



Le point E appartenant au segment $[AD]$, on en déduit :
$$AD = AE + ED = 497{,}3 + 2{,}7 = 500\,m$$
La personne se tenant droite et mesurant la distance du sommet de la tour Eiffel jusqu'à son centre, on en déduit que :
$$(AC) /\!/ (EF)$$
On a : $E \in [DA]$; $F \in [DC]$; $(EF) /\!/ (AC)$.
D'après le théorème de Thalès, on a l'égalité des rapports suivants :
$$\frac{DE}{DA} = \frac{DF}{DC} = \frac{EF}{AC}$$
Par application numérique, on obtient :
$$\frac{DE}{DA} = \frac{FE}{AC}$$
$$\frac{2{,}7}{500} = \frac{1{,}75}{AC}$$
D'après le produit en croix, on obtient :
$$2{,}7 \times AC = 1{,}75 \times 500$$
$$AC = \frac{1{,}75 \times 500}{2{,}7}$$
$$AC \approx 324{,}074\,m$$
$$AC \approx 324\,m$$

C.6

① Le triangle ABC est rectangle en B.
D'après le théorème de Pythagore, on a l'égalité suivante :
$AC^2 = AB^2 + BC^2$
Par application numérique, on a :
$$5{,}2^2 = 4{,}8^2 + BC^2$$
$$27{,}04 = 23{,}04 + BC^2$$
$$BC^2 = 27{,}04 - 23{,}04$$
$$BC^2 = 4$$
$$BC = 2$$

② ⓐ Les points A, C, N sont alignés.
Les points A, B, M sont alignés.
Les droites (BC) et (MN) sont parallèles.
D'après le théorème de Thalès, on a l'égalité suivante :
$$\frac{AC}{AN} = \frac{AB}{AM} = \frac{BC}{MN}$$
Utilisons l'égalité suivante :
$$\frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN}$$
Par application numérique, on a :
$$\frac{5{,}2}{AN} = \frac{2}{3}$$
$$AN \times 2 = 5{,}2 \times 3$$
$$AN = \frac{15{,}6}{2}$$
$$AN = 7{,}8$$

ⓑ De l'égalité des trois quotients obtenue à la question précédente, utilisons l'égalité suivante :
$$\frac{AB}{AM} = \frac{BC}{MN}$$
Par application numérique, on a :
$$\frac{4{,}8}{AM} = \frac{2}{3}$$
A l'aide du produit en croix, on écrit :
$$2 \times AM = 4{,}8 \times 3$$
$$AM = \frac{14{,}4}{2}$$
$$AM = 7{,}2$$

C.7

① Le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle.
Si un quadrilatère est un rectangle alors ses quatre angles sont des angles droits.
On en déduit : $(BC) \perp (AB)$

On a : $(MN) \perp (AB)$; $(BC) \perp (AB)$
Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième alors elles sont parallèles entre elles.
On en déduit : $(MN) /\!/ (BC)$.

② Le triangle ABC est un triangle rectangle en B.
Si un triangle est rectangle alors il vérifie l'égalité de Pythagore.
$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$AC^2 = 5{,}6^2 + 4{,}2^2$$
$$AC^2 = 31{,}36 + 17{,}64$$
$$AC^2 = 49$$
$$AC = \sqrt{49} = 7\,cm$$

③ Dans le triangle ABC, on a les propriétés :
$M \in [AC]$; $N \in [AB]$; $(MN) /\!/ (CB)$
D'après le théorème de Thalès, on a les égalités suivantes de rapports :
$$\frac{AM}{AC} = \frac{AN}{AB} = \frac{MN}{BC}$$
Par application numérique, on a :
$$\frac{4}{7} = \frac{AN}{5{,}6} = \frac{MN}{BC}$$
$$\frac{4}{7} = \frac{AN}{5{,}6}$$
D'après le produit en croix, on a :
$$4 \times 5{,}6 = 7 \times AN$$
$$AN = \frac{4 \times 5{,}6}{7}$$
$$AN = 3{,}2\,cm$$

C.8

① Exprimons ces quotients sous la forme d'une fraction réduite :
$$\frac{AR}{AN} = \frac{4{,}8}{7{,}5} = \frac{48}{75} = \frac{16}{25} \quad ; \quad \frac{AC}{AT} = \frac{3{,}2}{5} = \frac{32}{50} = \frac{16}{25}$$

Remarque : dans cet exercice, nous aurions pu aussi utiliser la calculatrice puisque ces quotients ont une valeur décimale exacte : $\frac{AR}{AN} = 0{,}64$; $\frac{AC}{AT} = 0{,}64$

② Voici le chainon déductif complété :

Chaînons déductifs	
Je sais	Les points A, R, N et les points A, C, T sont alignés dans le même ordre. $\frac{AR}{AN} = \frac{AC}{AT}$
J'utilise	D'après la réciproque du théorème de Thalès :
J'en déduis	$(RC) /\!/ (NT)$

C.9

On a les rapports :
$$\frac{AB}{AD} = \frac{1{,}6}{1{,}6 + 2{,}4} = \frac{1{,}6}{4} = 0{,}4 \quad ; \quad \frac{AC}{AE} = \frac{2{,}4}{6} = 0{,}4$$
Les points A, B, D et les points A, C, E sont alignés dans le même ordre.
On a l'égalité des quotients : $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$
D'après la réciproque du théorème de Thalès, on en déduit que : $(BC) /\!/ (DE)$

C.10

① On a les carrés des longueurs :
$AE^2 = 64$; $AF^2 = 100$; $EF^2 = 36$
On remarque l'égalité :
$$64 + 36 = 100$$
$$AE^2 + EF^2 = AF^2$$
Le triangle AEF vérifie l'égalité de Pythagore.
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, on en déduit que le triangle AEF est rectangle en E.

② On a les rapports de distance :
$$\frac{AE}{AR} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \quad ; \quad \frac{AF}{AT} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$$
Les points A, E, R et les points A, F, T sont alignés

dans cet ordre. Les rapports de longueurs $\dfrac{AE}{AR}$ et $\dfrac{AF}{AT}$ sont différents, la contraposé du théorème de Thalès permet d'affirmer que les droites (EF) et (RT) ne sont pas parallèles.

C.11

1. Le triangle BMN est rectangle en M.
D'après le théorème de Pythagore, on a la relation :
$$BN^2 = MB^2 + MN^2$$
$$BN^2 = 12^2 + 9^2$$
$$BN^2 = 144 + 81$$
$$BN^2 = 225$$
$$BN = \sqrt{225}$$
$$BN = 15\,m$$

2. On remarque :
$$\frac{BM}{BA} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} = 0{,}6 \quad ; \quad \frac{BN}{BC} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$
Les points B, M, A et les points B, N, C sont alignés dans le même ordre et on a l'égalité de rapports :
$$\frac{BM}{BA} = \frac{BN}{BC}$$
D'après la réciproque du théorème de Thalès, on en déduit que les droites (MN) et (AC) sont parallèles.