Chapitre 12 - Espace

C.1

1. (a) La base de cette pyramide est un quadrilatère.
   (b) La pyramide $ABCDS$ comprend 8 arêtes.
   (c) Cette pyramide contient 5 faces.
2. (a) La base de cette pyramide est un hexagone.
   (b) Cette pyramide contient 12 arêtes.
   (c) Cette pyramide contient 7 faces.

C.2

1. La pyramide $\mathcal{P}$ a pour base un heptagone qui a 7 côtés.
Ainsi, la pyramide $\mathcal{P}$ possède :
$n+1=7+1=8$ faces
2. La pyramide $\mathcal{Q}$ possède 18 arêtes. En notant n le nombre de côtés de la base, le nombre d'arêtes de la pyramide $\mathcal{Q}$ vérifie :
$$2\times n=18$$
$$n=\frac{18}{2}$$
$$n=9 \text{ côtés}$$
La base de la pyramide $\mathcal{Q}$ est un ennéagone.

C.3

1. Déterminons le volume du prisme droit $ABCDEFGH$:
$\mathcal{V}=L\times\ell\times h=AB\times BC\times CG=12\times8\times4=384\,m^3$
2. La pyramide $EFGH$ admet pour base le rectangle $EFGH$ dont l'aire vaut :
$\mathcal{A}=EF\times FG=12\times8=96\,m^2$

Ainsi, la pyramide $EFGHS$ a donc pour volume :
$$\mathcal{V}'=\frac{1}{3}\times\mathcal{A}\times h=\frac{1}{3}\times96\times3=96\,m^3$$

On en déduit que le volume de la maison est :
$\mathcal{V}+\mathcal{V}'=384+96=480\,m^3$

C.4

1. La pyramide de Khéops est une pyramide à base carrée dont la base a pour aire :
$\mathcal{A}=230^2=52\,900\,m^2$

Le volume de cette pyramide est égal à :
$$\mathcal{V}=\frac{1}{3}\times\mathcal{A}\times h=\frac{1}{3}\times52\,900\times146$$
$$\approx2\,574\,466{,}66\approx2\,574\,467\,m^3$$
2. On a le tableau de proportionnalité suivant :

Volume *(en m^3)*	0,95	2 574 467
Poids *(en kg)*	2 100	x

D'après le produit en croix, on a :
$$0{,}95\times x=2\,574\,467\times2\,100$$
$$x=\frac{2\,574\,467\times2\,100}{0{,}95}$$
$$x\approx5\,690\,270\,526{,}31$$
$$x\approx5\,690\,270\,526\,kg$$

C.5

1. Le triangle ABS est un triangle rectangle en A.
D'après le théorème de Pythagore, on a l'égalité :
$$BS^2=AB^2+AS^2$$
$$25^2=15^2+AS^2$$
$$625=225+AS^2$$
$$AS^2=625-225$$
$$AS^2=400$$
$$AS=\sqrt{400}$$
$$AS=20\,cm$$
2. La base de la pyramide est le triangle ABC rectangle en A dont l'aire $\mathcal{A}$ a pour valeur :
$$\mathcal{A}=\frac{AC\times AB}{2}=\frac{21\times15}{2}=157{,}5\,cm^2$$
Ainsi, le volume $\mathcal{V}$ de la pyramide $ABCS$ a pour valeur :
$$\mathcal{V}=\frac{1}{3}\times\mathcal{A}\times h=\frac{1}{3}\times157{,}5\times20=1050\,cm^3$$

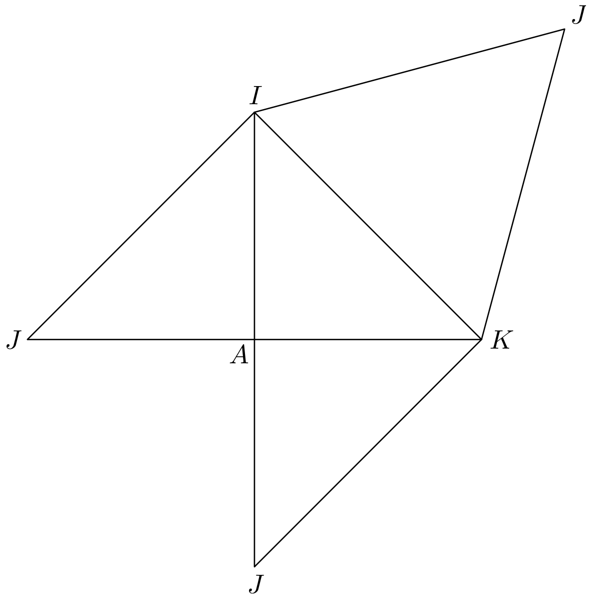
C.6

1. I et K étant les milieux respectifs des faces $[AB]$ et $[AD]$, on a les mesures suivantes :
$AI=AJ=6\,cm$

La face $ABCD$ est un carré : on en déduit que le triangle AIK est un triangle rectangle en A. Ainsi, l'aire du triangle AIK admet pour aire :
$$\mathcal{A}=\frac{AI\times AK}{2}=\frac{6\times6}{2}=\frac{36}{2}=18\,cm^2$$
2. J étant le milieu de l'arête $[AE]$, on a la mesure :
$AJ=6\,cm$.
La pyramide $AIKJ$ de base AKI a pour hauteur $[JA]$. On en déduit le volume de cette pyramide d'après la formule de l'énoncé :
$$\mathcal{V}=\frac{\mathcal{A}_{AIK}\times AJ}{3}=\frac{18\times6}{3}=6\times6=36\,cm^3$$
3. Le cube $ABCDEFGH$ a pour volume :
$\mathcal{V}'=12^3=1728\,cm^3$

Ainsi, la fraction représentée par la pyramide relativement au cube est définie par :
$$\frac{\mathcal{V}}{\mathcal{V}'}=\frac{36}{1728}=\frac{1}{48}$$
4. Les trois faces AIK, AKJ, AIJ sont des triangles rectangles et isocèles en A. Ces trois faces ayant même mesures, on en déduit l'égalité des longueurs :
$IJ=IK=JK$
On en déduit que le triangle IJK est un triangle équilatéral.

Voici une représentation du patron demandée, mais pas en vraie grandeur :



C.7 Les points S, M, A et les points S, N, B sont alignés. Les droites $(H'N)$ et (HB) sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès, on a les égalités de rapports :

$$\frac{SH'}{SH} = \frac{SN}{SB} = \frac{H'H}{NB}$$
$$\frac{SH'}{12{,}75} = \frac{9{,}5}{14{,}25} = \frac{H'N}{HB}$$
$$\frac{SH'}{12{,}75} = \frac{9{,}5}{14{,}25}$$

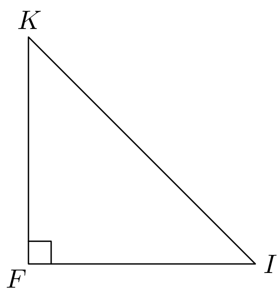
D'après le produit en croix, on a :

$$SH' \times 14{,}25 = 12{,}75 \times 9{,}5$$
$$SH' = \frac{12{,}75 \times 9{,}5}{14{,}25}$$
$$SH' = 8{,}5\,cm$$

C.8

1. Les points I et K étant les milieux respectifs des segments $[FE]$ et $[FG]$. On en déduit les mesures :
$FI = 3\,cm$; $FK = 3\,cm$

Le triangle FIK étant un triangle rectangle en F, on a la représentation suivante :



2.
- Les triangles IFK, FJI et FKJ ont les mêmes dimensions. On en déduit l'égalité des mesures :
$IK = IJ = KJ$
On en déduit que le triangle IJK est un triangle équilatéral.
Ainsi, les deux schémas possibles pour le patron de la pyramide $FIJK$ sont les schémas 3 et 4.
- Les trois triangles IFK, FJI et FKJ étant des triangles rectangles, le schéma 4 ne peut être retenu, car il comprend deux triangles équilatéraux.
On en déduit que le schéma représentant un patron de la pyramide $FIJK$ est le schéma 3.

C.9

1. a. Le triangle AHD est un triangle rectangle en D.
Si un triangle est rectangle alors il vérifie l'égalité de Pythagore.
On a l'égalité :

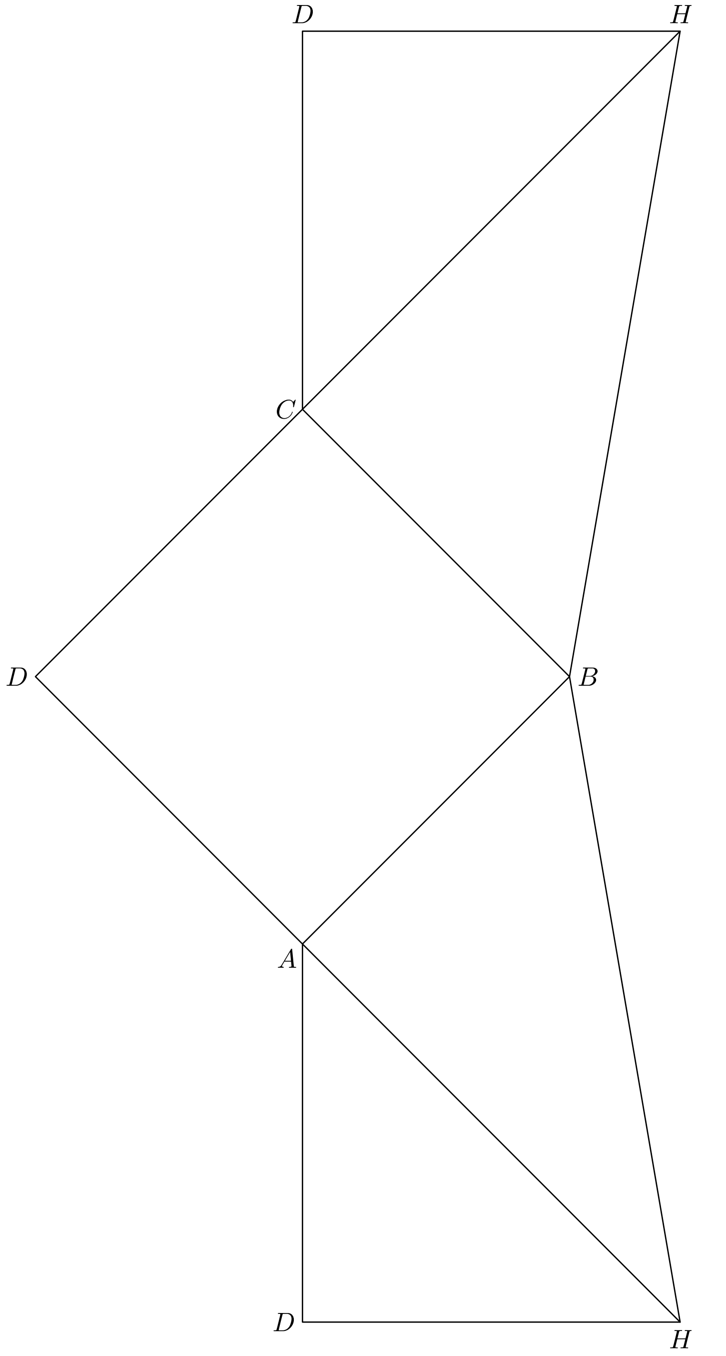
$AH^2 = AD^2 + DH^2$	$AH^2 = 50$
$AH^2 = 5^2 + 5^2$	$AH = \sqrt{50}$
$AH^2 = 25 + 25$	$AH \approx 7{,}1\,cm$

b. Le triangle DHB est un triangle rectangle en D.
Si un triangle est rectangle alors il vérifie l'égalité de Pythagore.
On a l'égalité :

$BH^2 = HD^2 + DB^2$	$BH^2 = 75$
$BH^2 = 5^2 + \left(\sqrt{50}\right)^2$	$BH = \sqrt{75}$
$BH^2 = 25 + 50$	$BH \approx 8{,}7\,cm$

2. a.
- La face $ABCD$ est un carré de $5,cm$ de côté.
- La face DHC est un triangle isocèle rectangle en D dont les dimensions sont :
$CD = 5\,cm$; $HD = 5\,cm$; $CH \approx 7{,}1\,cm$
- La face CHB est un triangle rectangle en C dont les dimensions sont :
$CH \approx 7{,}1\,cm$; $HB \approx 8{,}7\,cm$; $CB = 5\,cm$
- La face DHA est un triangle isocèle rectangle en D dont les dimensions sont :
$HD = 5\,cm$; $HA \approx 7{,}1\,cm$; $DA = 5\,cm$
- La face ABH est un triangle rectangle en A dont les dimensions sont :
$AB = 5\,cm$; $HB = 8{,}7\,cm$; $AH = 7{,}1\,cm$

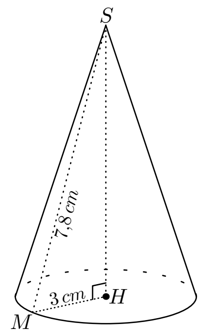
b. Voici un patron de cette pyramide



C.10 Le volume $\mathcal{V}$ du cône est donné par la formule :

$$\mathcal{V} = \frac{\pi\times R^2\times h}{3} = \frac{\pi\times 2^2\times 5}{3} \approx 20{,}94 \approx 21\,cm^3$$

C.11 En considérant les points ci-dessous :



Le triangle MHS est un triangle rectangle en H.
D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$\begin{aligned} MS^2 &= HM^2 + HS^2 \\ 7{,}8^2 &= 3^2 + HS^2 \\ 7{,}8^2 &= 3^2 + HS^2 \\ 60{,}84 &= 9 + HS^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} HS^2 &= 60{,}84 - 9 \\ HS^2 &= 51{,}84 \\ HS &= \sqrt{51{,}84} \\ HS &= 7{,}2\,cm \end{aligned}$$

Le volume du cône a pour valeur :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\times\pi\times r^2\times h$$
$$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\times\pi\times 3^2\times 7{,}2$$
$$\mathcal{V} \approx 67{,}858401$$
$$\mathcal{V} \approx 67{,}858\,cm^3$$

C.12 Les points S, A', A et les points S, H', H sont alignés.
Les droites $(A'H')$ et (AH) sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès, on a l'égalité des rapports :

$$\frac{SA'}{SA} = \frac{SH'}{SH} = \frac{A'H'}{AH}$$
$$\frac{SA'}{SA} = \frac{5}{15} = \frac{A'H'}{6}$$
$$\frac{5}{15} = \frac{A'H'}{6}$$

D'après le produit en croix :

$$5\times 6 = 15\times A'H'$$
$$5\times 6 = 15\times A'H'$$
$$A'H' = \frac{5\times 6}{15}$$
$$A'H' = 2\,cm$$

C.13

- La circonférence du cercle est : $2\times\pi\times r$
- L'arc de cercle a pour longueur :
  $2\times\pi\times h\times\dfrac{\alpha}{360}$

La circonférence du cercle étant égale à la longueur de l'arc de cercle, on a l'égalité :

$$2\times\pi\times r = 2\times\pi\times h\times\frac{\alpha}{360}$$
$$2\times\pi\times r = \frac{2\times\pi\times h}{360}\times\alpha$$
$$\frac{2\times\pi\times r}{\frac{2\times\pi\times h}{360}} = \alpha$$
$$2\times\pi\times r\times\frac{360}{2\times\pi\times h} = \alpha$$
$$\alpha = \frac{360\times r}{h}$$

C.14

1. En utilisant le quadrillage du repère, on a :
   $OD = 5$; $OB = 3$; $OE = 3$

   Ainsi, le volume de ce pavé droit a pour valeur :
   $\mathcal{V} = L\times\ell\times h = 5\times 3\times 3 = 45\,cm^2$

2. Voici les coordonnées des points :

   $D\,(0\,;5\,;0)$; $B\,(3\,;0\,;0)$

   $E\,(0\,;0\,;3)$; $G\,(3\,;5\,;3)$

C.15

1. - Le point F a la même abscisse et ordonnée que le point B, mais il a la même côte que le point E. Ses

coordonnées sont :
$F\left(5\,;0\,;3\right)$

- Le point C a :
  - la même abscisse que le point B.
  - la même ordonnée que le point D.
  - une côte nulle.

  Le point C a pour coordonnées : $C\big(5\,;10\,;0\big)$

(2) Le pavé droit $ABCDDEFGH$ a pour mesure :
$L = BC = 10\,cm$; $\ell = DC = 5\,cm$; $h = BF = 3\,cm$

On en déduit le volume $\mathcal{V}$ du pavé droit :
$\mathcal{V} = L \times \ell \times h = 10 \times 5 \times 3 = 150\,cm^2$

C.16

(1) (a) Le point F étant "*au-dessus du point B*", on en déduit les coordonnées du point B : $B\big(3\,;-4\,;0\big)$
Le côté $[AB]$ étant parallèle à l'axe des abscisses, la mesure AB est égale à la différence des abscisses de ses points :
$A3 - (-3) = 3 + 3 = 6$

(b) De même :

- Le point C a pour coordonnées : $C\big(3\,;4\,;0\big)$
  Le côté $[BC]$ étant parallèle à l'axe des ordonnées, on en déduit :
  $BC = 4 - (-4) = 4 + 4 = 8$
- Le côté $[FB]$ étant parallèle à l'axe des côtes, on en déduit la mesure :
  $FB = 2 - 0 = 2$

Ainsi, ce pavé droit a pour mesure :
$L = 8\,cm$; $\ell = 6\,cm$; $h = 2\,cm$

(2) On en déduit le volume de ce pavé droit :
$\mathcal{V} = L \times \ell \times h = 8 \times 6 \times 2 = 96\,cm^3$