Chapitre 2 - Théorème de Thalès

Correction 1

1. Le point F est un point du segment $[EH]$, on en déduit :
$EH = EF + FH = 1{,}5 + 3 = 4{,}5$

2. Les points E, F, H sont alignés.
Les points E, G, I sont alignés.
Les droites (FG) et (HI) sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès, on a :
$$\frac{EF}{EH} = \frac{EG}{EI} = \frac{FG}{HI}$$
Par application numérique, on a :
$$\frac{1{,}5}{4{,}5} = \frac{2}{EI}$$
$$\frac{1}{3} = \frac{2}{EI}$$
Le produit en croix permet d'obtenir :
$$EI = 3\times 2$$
$$EI = 6$$

3. Le point G est un point du segment $[EI]$, on a l'égalité suivante :
$$EI = EG + GI$$
$$6 = 2 + GI$$
$$GI = 6 - 2$$
$$GI = 4$$

Correction 2

Voici la rédaction attendue :

1. Les points K, G, J et les points K, H, I sont alignés.
Les droites (GH) et (JI) sont parallèles.

D'après la théroème de Thalès, on a :
$$\frac{KG}{KJ} = \frac{KH}{KI} = \frac{GH}{JI}$$

2. Les points Z, X, V et les points Z, Y, W sont alignés.
Les droites (VW) et (YX) sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès, on a :
$$\frac{ZX}{ZV} = \frac{ZY}{ZW} = \frac{YX}{VW}$$

Correction 3

1. a. Les points O, M, D sont alignés et les points O, A, C sont alignés.
Les droites (AM) et (CD) sont parallèles.
D'après le théorème de Thalès, on a :
$$\frac{OM}{OD} = \frac{OA}{OC} = \frac{AM}{CD}$$

b. Les points O, M, B sont alignés et les points O, A, N sont alignés.
Les droites (BN) et (AM) sont parallèles.
D'après le théorème de Thalès :
$$\frac{OB}{OM} = \frac{ON}{OA} = \frac{BN}{AM}$$

2.
- Calcul de OB :

D'après la question 1. a., on a : $\dfrac{OB}{OM} = \dfrac{ON}{OA}$.
Ce qui donne :
$$OB = \frac{ON}{OA}\times OM = \frac{5}{4}\times 3 = \frac{15}{4} = 3{,}75\,cm$$

- Calcul de AM :

D'après la question 1. b., on a :
$$\frac{AM}{CD} = \frac{OA}{OC}$$
Ce qui donne : $AM = \dfrac{OA}{OC}\times CD = \dfrac{4}{6}\times 3 = 2\,cm$

- Calcul de BN :

D'après la question 1. b., on a :
$$\frac{ON}{OA} = \frac{BN}{AM}$$
Ce qui donne : $BN = \dfrac{ON}{OA}\times AM = \dfrac{5}{4}\times 2 = \dfrac{5}{2}\,cm$

Correction 4

Dans la configuration de droite :

Les points O, A et D et les points B, O et C sont alignés dans le même ordre.

On remarque :
$$\frac{OA}{OC} = \frac{5}{7{,}5} = \frac{2}{3} \quad ; \quad \frac{OB}{OD} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$
Ainsi : $\dfrac{OA}{OC} = \dfrac{OB}{OD}$.

D'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (AB) et (DC) sont parallèles.

Correction 5

Les points A, B, M et les points A, C, N sont alignés dans le même ordre.

Le point B appartient au segment $[AM]$, on en déduit l'égalité :
$$AM = AB + BM = 0{,}9 + 1{,}2 = 2{,}1$$

On a les valeurs suivantes des quotients :
$$\frac{AB}{AM} = \frac{0{,}9}{2{,}1} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7} \quad ; \quad \frac{AC}{AN} = \frac{1{,}5}{3{,}5} = \frac{3}{7}$$
Ainsi, on en déduit l'égalité suivante des quotients :
$$\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN}$$
D'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (BC) et (MN) sont parallèles entre elles.

Correction 6

Les points A, G, D et les points B, G, C sont alignés dans cet ordre.
Les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
D'après le théorème de Thalès, on a l'égalité des rapports suivants :
$$\frac{GB}{GC} = \frac{GA}{GD} = \frac{AB}{CD}$$
$$\frac{GB}{GC} = \frac{AB}{CD}$$
$$\frac{45}{30} = \frac{51}{CD}$$
$$\frac{3}{2} = \frac{51}{CD}$$
D'après le produit en croix, on a :
$$3\times CD = 2\times 51$$
$$CD = \frac{2\times 51}{3}$$
$$CD = 2\times 17$$
$$CD = 34\,cm$$

Correction 7

1. On a les longueurs suivantes obtenues grâce aux données de l'énoncé :
   - $CB = 0{,}2\,cm$: elle correspond à l'épaisseur du mur formant le puits ;
   - $FG = 0{,}95\,cm$: c'est le diamètre du puits et l'épaisseur du mur du puits ;
   - $RB = 0{,}8\,m$: c'est la différence entre la hauteur du regard et la hauteur du puits.

2. Les points R, C, F et R, B, G sont alignés.
Le fond et le rebord étant horizontaux, on en déduit que les droites (BC) et (FG) sont parallèles.
D'après le théorème de Thalès, on a l'égalité des quotients suivants :
$$\frac{RB}{RG} = \frac{RC}{RF} = \frac{BC}{FG}$$
$$\frac{0{,}8}{RG} = \frac{RC}{RF} = \frac{0{,}2}{0{,}95}$$
Utilisons l'égalité suivante :
$$\frac{0{,}8}{RG} = \frac{0{,}2}{0{,}95}$$
D'après le produit en croix, on a :
$$0{,}8\times0{,}95 = RG\times0{,}2$$
$$RG = \frac{0{,}8\times0{,}95}{0{,}2}$$
$$RG = 4\times0{,}95$$
$$RG = 3{,}8\,m$$
Le point B étant un point du segment $[RG]$, on a l'égalité :
$$RG = RB + BG$$
$$3{,}8 = 0{,}8 + BG$$
$$BG = 3{,}8 - 0{,}8$$
$$BG = 3\,m$$
La profondeur du puits est de $3\,m$

3. Le puits étant de forme cylindrique de diamètre $75\,cm$ et la hauteur de l'eau étant de $2{,}60\,m$, son volume est de :
$$\mathcal{V} = h\times\pi\times r^2 = 2{,}6\times\pi\times0{,}375^2 \approx 1{,}15\,m^3$$
Le berger disposera de suffisamment d'eau.

Correction 8

Les points O, A et C et les points O, B et D sont alignés et dans le même ordre.

On remarque que :
$$\frac{OA}{OC} = \frac{6}{4{,}8} = \frac{5}{4} \quad ; \quad \frac{OB}{OD} = \frac{5}{4}$$
Ainsi : $\dfrac{OA}{OC} = \dfrac{OB}{OD}$

D'après la réciproque du théoréme de Thalès, les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Correction 9

Les points A, B, M et les points A, C, N sont alignés dans le même ordre sur leurs droites respectives.

Le calcul des quotients de longueurs donne :
$$\frac{AM}{AB} = \frac{10{,}5}{4{,}5} = \frac{7}{3} \quad ; \quad \frac{AN}{AC} = \frac{7}{3}$$
Donc : $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$

D'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

Correction 10

1. Les points A, C, F et les points A, B, G sont alignés.
Les droites (BC) et (GF) sont parallèles.
D'après le théorème de Thalès, on a l'égalité suivante :
$$\frac{AC}{AF} = \frac{AB}{AG} = \frac{CB}{GF}$$
On en déduit l'égalité suivante :
$$\frac{4}{3{,}6} = \frac{4{,}5}{GF}$$
Le produit en croix donne :
$$4\times GF = 4{,}5\times3{,}6$$
$$GF = \frac{4{,}5\times3{,}6}{4} = 4{,}05$$

2. Les points A, C, E et les points A, B, D sont alignés dans le même ordre sur leurs droites respectives.
De plus :
$$\frac{AC}{AE} = \frac{4}{6{,}4} = 0{,}625 \quad ; \quad \frac{AB}{AD} = \frac{3}{4{,}8} = 0{,}625$$
D'aprés la réciproque du théorème de Thalès, les droites (BC) et (ED) sont parallèles.

Correction 11

1. Pour montrer que le carré de la plus grande longueur est égale à la somme des carrés des deux autres longueurs, on calcule séparemment ces deux valeurs :
   - $CD^2 = 10{,}4^2 = 108{,}16$
   - $DE^2 + CD^2 = 4^2 + 9{,}6^2 = 16 + 92{,}16 = 108{,}16$

   On remarque l'égalité suivante :
   $CE^2 = DE^2 + CD^2$.
   Si un triangle vérifie la propriété de Pythagore alors ce triangle est rectangle.
   On en déduit que le triangle CDE est rectangle en D.

2. On a $(AB)\perp(BD)$ et $(DE)\perp(BD)$
Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième alors elles sont parallèles entre elles.
On en déduit : $(AB)/\!/(DE)$

3. Les points B, C, D et les points A, C, E sont alignés.
Les droites (AB) et (DE) sont parallèles.

   D'après le théorème de Thalès, on a :
$$\frac{CB}{CD} = \frac{CA}{CE} = \frac{AB}{DE}$$
Utilisons l'égalité :
$$\frac{CB}{CD} = \frac{AB}{DE}$$
Par application numérique, on a :
$$\frac{12}{9{,}6} = \frac{AB}{4}$$
Le produit en croix donne :
$$12\times4 = 9{,}6\times AB$$
$$AB = \frac{12\times4}{9{,}6}$$
$$AB = 5\,cm$$

Correction 12

Une video est accessible

Le triangle ABC étant rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore, on a la relation :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$
$$BC^2 = 300^2 + 400^2$$
$$BC^2 = 90\,000^2 + 160\,000^2$$
$$BC^2 = 250\,000$$
$$BC = 500$$

Les points C, A, E et les points C, B, D sont alignés.
Les droites (AB) et (ED) sont parallèles entre elles.

D'après le théorème de Thalès, on a les égalités de rapports suivants :

$$\frac{CB}{CD} = \frac{CA}{CE} = \frac{AB}{DE}$$

- Pour déterminer la longueur CD, utilisons l'égalité suivante :
  $$\frac{CB}{CD} = \frac{CA}{CE}$$
  Par application numérique, on a :
  $$\frac{500}{CD} = \frac{400}{1000}$$
  D'après le produit en croix, on a :
  $$500\times1000 = CD\times400$$
  $$CD = \frac{500\times1000}{400}$$
  $$CD = \frac{500\times1000}{400}$$
  $$CD = 1250\,m$$
- Pour déterminer la longueur DE, utilisons l'égalité suivante :
  $$\frac{CA}{CE} = \frac{AB}{DE}$$
  Par application numérique, on a :
  $$\frac{400}{1000} = \frac{300}{DE}$$
  D'après le produit en croix, on a :
  $$400\times DE = 1000\times300$$
  $$DE = \frac{1000\times300}{400}$$
  $$DE = 750\,m$$

Ainsi, cette course a une longueur de :

$$AB+BC+CD+DE = 300+500+1250+750 = 2\,800\,m$$

