Rappels - Réciproque du théorème de Pythagore

Correction 1

- Dans le triangle ABC, on a :
$AB^2 = 2{,}9^2 = 8{,}41$; $AC^2 = 2{,}1^2 = 4{,}41$; $BC^2 = 2^2 = 4$
On remarque l'égalité suivante : $AB^2 = CA^2 + CB^2$

Le triangle ABC vérifie l'égalité de Pythagore.
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, on en déduit que le triangle ABC est rectangle en C.

- Dans le triangle rectangle DEF, on a :
$DF^2 = 7^2 = 49$; $DE^2 = 4{,}2^2 = 17{,}64$; $EF^2 = 5{,}6^2 = 31{,}36$
On remarque l'égalité suivante : $DF^2 = ED^2 + EF^2$

Le triangle DEF vérifie l'égalité de Pythagore.
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, on en déduit que le triangle DEF est rectangle en D.

Correction 2

- **Pour le triangle ABC :**
On a les carrés des longueurs :
$AB^2 = 7{,}5^2 = 56{,}25$; $AC^2 = 5^2 = 25$; $BC^2 = 4{,}5^2 = 20{,}25$
Ces trois nombres ne forment pas un triplet pythagoricien.

Le triangle ABC ne vérifie pas l'égalité de Pythagore, on en déduit que le triangle ABC n'est pas un triangle rectangle.

- **Pour le triangle DEF :**
On a les carrés des longueurs :
$DF^2 = 17^2 = 289$; $ED^2 = 8^2 = 64$; $EF^2 = 15^2 = 225$
On remarque l'égalité : $DF^2 = ED^2 + EF^2$

Ainsi, le triangle DEF vérifie l'égalité de Pythagore.
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, on en déduit que le triangle DEF est rectangle en E.

Correction 3

1. Le triangle BCD est rectangle en D.
Si un triangle est rectangle alors il vérifie l'égalité de Pythagore.
On a la relation :
$BC^2 = DB^2 + DC^2$
Par application numérique, on a :
$$BC^2 = 5{,}2^2 + 6{,}1^2$$
$$BC^2 = 27{,}04 + 37{,}21$$
$$BC^2 = 64{,}25$$
$$BC = \sqrt{64{,}25} \approx 8\,cm$$

2. Dans le triangle ABC, on a les carrés de longueurs :
$AC^2 = 79{,}21$; $AB^2 = 15{,}21$; $BC^2 = 64{,}25$

Le triangle ABC ne vérifie pas l'égalité de Pythagore :
On remarque que : $AC^2 \neq BA^2 + BC^2$
Si un triangle ne vérifie pas l'égalité de Pythagore alors ce triangle n'est pas un triangle rectangle.
Le triangle ABC n'est pas un triangle rectangle

Attention : *Attention ne pas utiliser la valeur 8 pour BC, car d'après la question précédente $BC^2 \neq 8^2$: on obtiendrait alors que ABC est rectangle ce qui n'est pas le cas.*

Correction 4

1. - Le triangle ABE est rectangle en A.
Si un triangle est rectangle alors il vérifie l'égalité de Pythagore.
On a la relation :
$$BE^2 = AB^2 + AE^2$$
$$BE^2 = 1{,}8^2 + 2{,}4^2$$
$$BE^2 = 3{,}24 + 5{,}76$$
$$BE^2 = 9$$
$$BE = \sqrt{9} = 3\,cm$$
   - Le triangle BED est rectangle en B.
Si un triangle est rectangle alors il vérifie l'égalité de Pythagore.
On a la relation :
$$DE^2 = BD^2 + BE^2$$
$$5^2 = BD^2 + 3^2$$
$$25 = BD^2 + 9$$
$$BD^2 = 25 - 9$$
$$BD^2 = 16$$
$$BD = \sqrt{16} = 4\,cm$$

2. Dans le triangle BDC, on a les carrés des longueurs :
$BC^2 = 10{,}24$; $CD^2 = 5{,}76$; $BD^2 = 16$
On remarque l'égalité suivante :
$$16 = 10{,}24 + 5{,}76$$
$$BD^2 = CB^2 + CD^2$$
Le triangle BCD vérifie l'égalité de Pythagore.
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, on en déduit que le triangle BDC est rectangle en C.

Correction 5

1. Le triangle BCD est rectangle en D.
Si un triangle est rectangle alors il vérifie l'égalité de Pythagore.
On a la relation :
$BC^2 = DB^2 + DC^2$
Par application numérique, on obtient :
$$BC^2 = 5{,}6^2 + 4{,}2^2$$
$$BC^2 = 31{,}36 + 17{,}64$$
$$BC^2 = 49$$
$$BC = \sqrt{49} = 7\,cm$$

2. Dans le triangle ABC, on a les valeurs :
$CB^2 = 49$; $AC^2 = 79{,}21$; $AB^2 = 15{,}21$

On remarque que le triangle ABC ne vérifie pas l'égalité de Pythagore :
$AC^2 \neq BA^2 + BC^2$
Si un triangle ne vérifie pas l'égalité de Pythagore alors ce triangle n'est pas un triangle rectangle.
Le triangle ABC n'est pas un triangle rectangle.

Correction 6

1. On a les carrés des longueurs suivantes :
$AB^2 = 70{,}56$; $AC^2 = 196$; $BC^2 = 125{,}44$
On remarque l'égalité :
$$196 = 70{,}56 + 125{,}44$$
$$AC^2 = BA^2 + BC^2$$
Le triangle ABC vérifie l'égalité de Pythagore.
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, on en déduit que le triangle ABC est un triangle rectangle en

B.

2. a. Le triangle ABC étant rectangle en B, les côtés $[AB]$ et $[AC]$, adjacents à l'angle droit, forment des bases et hauteurs respectives au triangle ABC. On a :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \frac{b\times h}{2} = \frac{AB\times BC}{2}\\ &= \frac{8{,}4\times 11{,}2}{2} = \frac{94{,}08}{2} = 47{,}04\,cm^2\end{aligned}$$

b. La hauteur issue de B est le segment $[BH]$; la base associé à cette hauteur est le côté $[AC]$. La formule de l'aire d'un triangle permet d'écrire :

$$\mathcal{A} = \frac{AC\times BH}{2}$$

En utilisant la valeur de l'aire trouvée à la question précédente :

$$\begin{aligned}47{,}04 &= \frac{14\times BH}{2}\\ 94{,}08 &= 14\times BH\\ BH &= \frac{94{,}08}{14} \approx 6{,}72\,m\end{aligned}$$

3. Le triangle BCH est un triangle rectangle en H.
Si un triangle est rectangle alors il vérifie l'égalité de Pythagore.
On en déduit l'égalité :

$$\begin{aligned}BC^2 &= HB^2 + HC^2\\ 11{,}2^2 &= 6{,}72^2 + HC^2\\ 125{,}44 &= 45{,}1584 + HC^2\\ HC^2 &= 125{,}44 - 45{,}1584\\ HC^2 &= 80{,}2816\\ HC &= \sqrt{80{,}2816} \approx 8{,}96\,m\end{aligned}$$

Correction 7

On va démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle en deux étapes :

- On a les valeurs suivantes :
  $AD^2 = 3{,}9^2 = 15{,}21$; $CD^2 = 8^2 = 64$; $AC^2 = 8{,}9^2 = 79{,}21$

  On remarque l'égalité : $AC^2 = DA^2 + DC^2$

  Le triangle ACD vérifie l'égalité de Pythagore.
  D'après la réciproque du théorème de Pythagore, on en déduit que le triangle ADC est rectangle en D.

- $\widehat{ADC} = 90^o$
  Si un parallélogramme possède un angle droit alors c'est un rectangle.
  On en déduit que le parallélogramme $ABCD$ est un rectangle.

