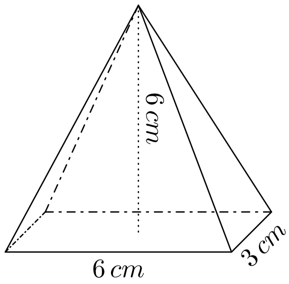
Chapitre 8 - Sphère

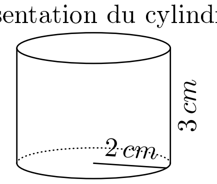
Correction 1

1. Voici la représentation des trois autres solides :

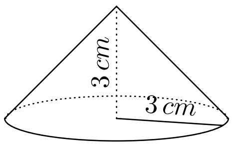
- Voici la représentation de la pyramide :



- Voici la représentation du cylindre :



- Voici la représentation du cône de révolution :



2. Voici les volumes de ces quatre solides :

- Volume de la pyramide :
$$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\times\text{aire de la base}\times hauteur$$
$$= \frac{1}{3}\times\big(6\times3\big)\times6 = 36\,cm^3$$
- Volume du cylindre :
$$\mathcal{V} = \pi\times\text{rayon}^2\times\text{hauteur}$$
$$= \pi\times2^2\times3$$
$$\approx 37{,}69911 \approx 37{,}70\,cm^3$$
- Volume du cône :
$$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\times\pi\times\text{rayon}^2\times\text{hauteur}$$
$$= \frac{1}{3}\times\pi\times3^2\times3$$
$$\approx 28{,}27433 \approx 28{,}27\,cm^3$$
- Volume de la boule :
$$\mathcal{V} = \frac{4}{3}\times\pi\times\text{rayon}^3$$
$$= \frac{4}{3}\times\pi\times2^3$$
$$\approx 33{,}51032 \approx 33{,}51\,cm^3$$

Voici les solides classés dans l'ordre croissant de leur volume :
Cône ; Boule ; Pyramide ; Cylindre

Correction 2

Le volume $\mathcal{V}$ du cube a pour valeur :
$$\mathcal{V} = 7^3 = 343\,cm^3$$

Le rayon de la sphère a pour mesure $3{,}5\,cm$. Le volume $\mathcal{V}'$ de la sphère a pour valeur :
$$\mathcal{V}' = \frac{4}{3}\times\pi\times r^3 = \frac{4}{3}\times\pi\times3{,}5^3 \approx 179{,}59\,cm^3$$

En prenant la volume du cube pour référence et en notant x le pourcentage de remplissage de la boule relativement au cube. On obtient le tableau de proportionnalité suivant :

Volume	343	179,59
Pourcentage	100	x

D'après le produit en croix, on a l'égalité :
$$343\times x = 100\times179{,}59$$
$$x = \frac{17959}{343}$$
$$x = \frac{17959}{343}$$
$$x \approx 52\,\%$$

Correction 3

1. Notons r le rayon d'un cercle de périmètre $56\,cm$. On a l'équation :
$$2\times\pi\times r = 56$$
$$r = \frac{56}{2\times\pi}$$
$$r \approx 8{,}9126$$
$$r \approx 9\,cm$$

2. La surface de la sphère représentant sa tête est :
$$\mathcal{A} = 4\times\pi\times R^2 = 4\times\pi\times9^2$$
$$\approx 1017{,}876 \approx 1018\,cm^2$$
Les cheveux couvrant la moitié de la sphère, les cheveux recouvrent une surface mesurant :
$$\mathcal{A}' = \frac{\mathcal{A}}{2} = \frac{1018}{2} = 509\,cm^2$$
En supposant que chaque centimètre carré possède 250 cheveux, la tête de Guillaume comprend :
$$250\times509 = 127\,250 \text{ cheveux}$$

Correction 4

1. - Le point F a la même abscisse et ordonnée que le point B mais il a la même côte que le point E. Ses coordonnées sont :
   $F\big(5\,;0\,;3\big)$
   - Le point C a :
     - la même abscisse que le point B.
     - la même ordonnée que le point D.
     - une côte nulle.

     Le point C a pour coordonnées : $C\big(5\,;10\,;0\big)$

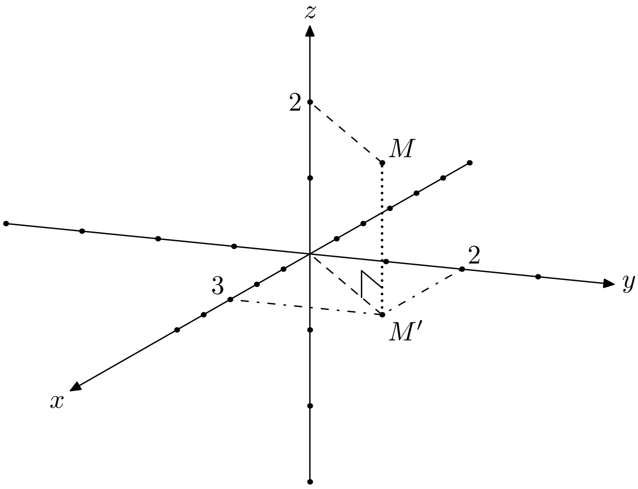
2. Le pavé droit $ABCDDEFGH$ a pour mesure :
$L = BC = 10\,cm$; $\ell = DC = 5\,cm$; $h = BF = 3\,cm$

On en déduit le volume $\mathcal{V}$ du pavé droit :
$$\mathcal{V} = L\times\ell\times h = 10\times5\times3 = 150\,cm^2$$

Correction 5

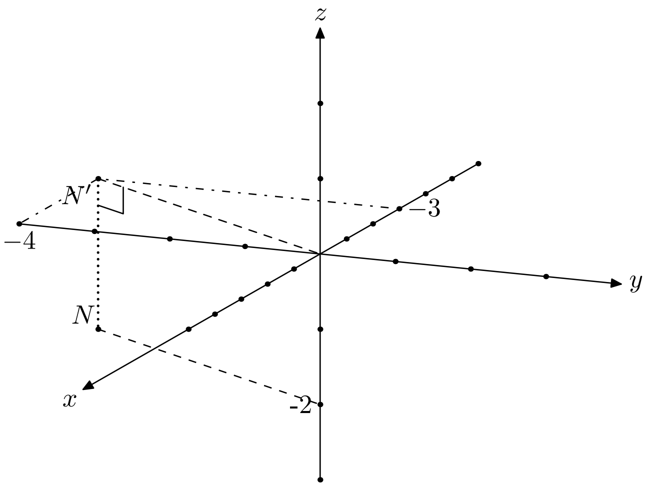
1. a. Le point M' a pour coordonnées dans le plan (OIJ) :
$M'\big(3\,;2\big)$

   b. Ainsi, le point M a pour coordonnées $M\big(3\,;2\,;2\big)$



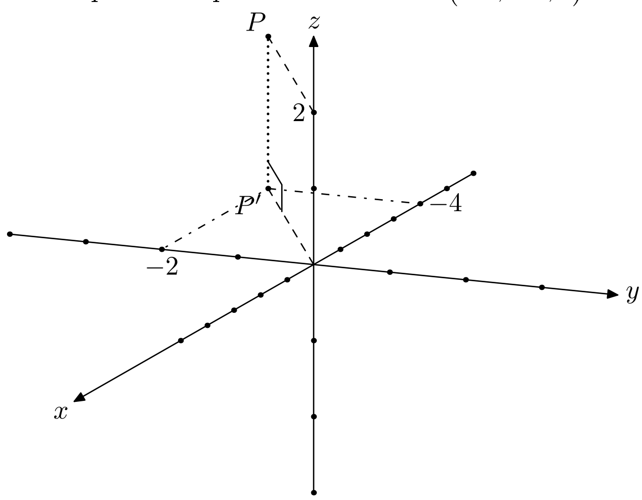
2. • Le point N' a pour coordonnées dans le plan (OIJ) : $N'(-3\,;-4)$

Le point N a pour coordonnées $N\big(-3\,;-4\,;-2\big)$



• Le point P' a pour coordonnées dans le plan (OIJ) : $P'(-4\,;-2)$

Le point P a pour coordonnées $P\big(-4\,;-2\,;2\big)$



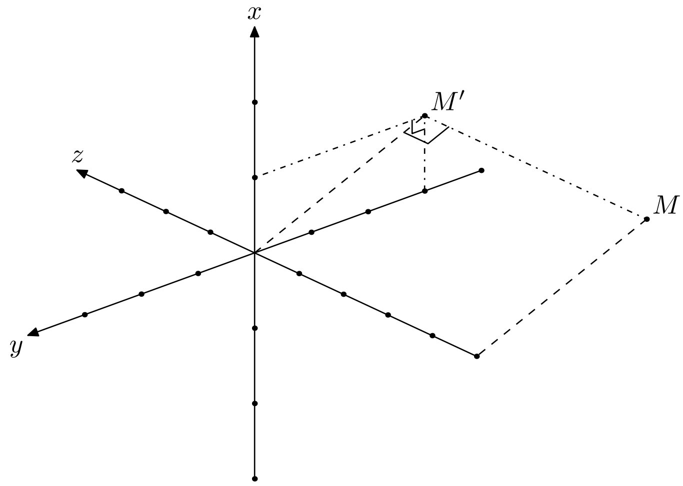
Correction 6

1. a. Dans le plan (Oxy), le point M' a pour coordonnées $(1\,;-3)$

   b. Dans le plan (Oyz), le point N' a pour coordonnées $(1\,;3)$

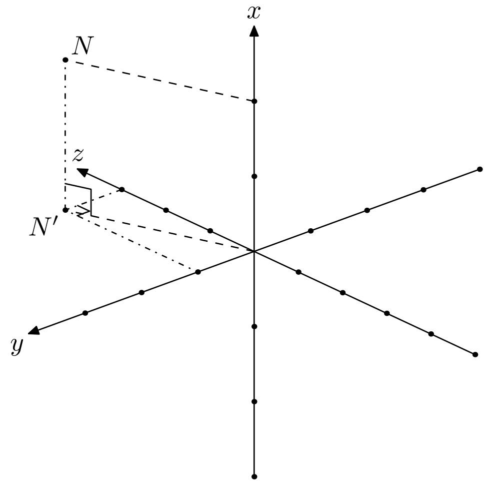
   c. Dans le plan (Oxz), le point P' a pour coordonnées $(-2\,;-2)$

2. a. Les coordonnées du point M :



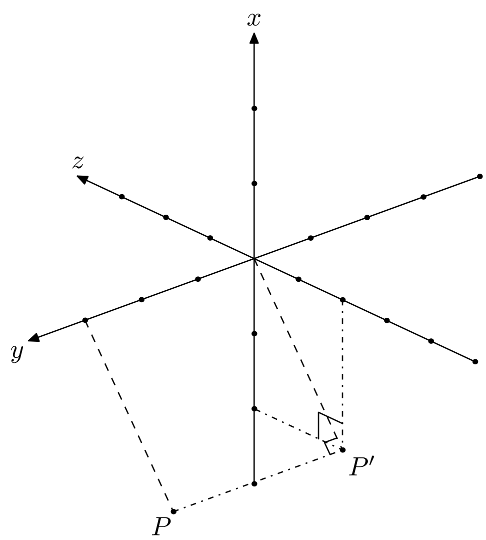
$M\big(1\,;-3\,;-5\big)$

   b. Les coordonnées du point N :



$N\big(2\,;1\,;3\big)$

   c. Les coordonnées du point P :



$P\big(-2\,;3\,;-2\big)$

Correction 7

Une video est accessible

- Pour le point A :
  - longitude : 0^o
  - latitude : 0^o
- Pour le point B :
  - longitude : -20^o
  - latitude : 20^o

- Pour le point C :
  - longitude : -100^o
  - latitude : 60^o

Correction 8

Une video est accessible

Voici les coordonnées des quatre points :

- A : $65^o\,N\ 30^o\,W$
- B : $0^o\,N\ 50^o\,E$
- C : $40^o\,S\ 150^o\,E$
- D : $40^o\,S\ 0^o\,E$

Correction 9

Voici les coordonnées de Pyeongchang :

- Longitude : 130^o Est
- Latitude : 37^o Nord

Correction 10

Une video est accessible

- Le point C est sur le même parallèle que la ville A, on en déduit qu'ils ont même latitude : la latitude du point C est $30^o\,S$.
  Le point C est sur le même méridien que la ville B : ils ont même longitude. On en déduit que le point C a pour longitude : $130^o\,E$.
  Le point C a pour coordonnées : $30^o\,S\ 130^o\,E$.
- Le point D est sur le même parallèle que la ville B : les points B et D ont la même latitude. La latitude du point D vaut $55^o\,N$.
  Le point D est sur le même méridien que le point A : ils ont même longitude. La longitude du point D est $10^o\,W$.
  Le point D a pour coordonnées : $55^o\,N\ 10^o\,W$.

Correction 11

1. L'équateur est un cercle de rayon $6\,370\,km$. Sa circonférence a pour valeur :
   $\mathcal{C} = 2\times\pi\times r = 2\times\pi\times 6370 \approx 40\,024\,km$
2. Des données de l'énoncé, on en définit que l'arc $\overset{\frown}{AB}$ est définie par un angle au centre ayant pour mesure :
   $\widehat{AOB} = 33^o$

   On a proportionnalité entre la mesure d'un arc et la mesure de l'angle définissant cet arc. On obtient le tableau de proportionnalité ci-dessous :

Longueur de l'arc	360	33
Angle au centre	40 024	x

   D'après le produit en croix, on obtient l'égalité :
   $360\times x = 40\,024\times 33$
   $x = \dfrac{40\,024\times 33}{360}$
   $x \approx 3\,669\,km$

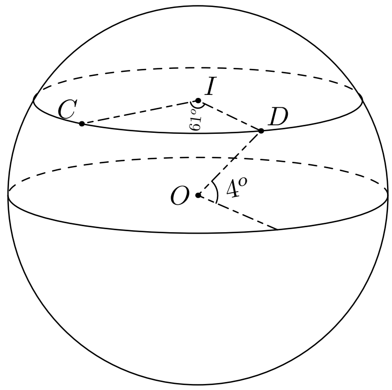
Correction 12

1. a. Les villes de Douala et Milan ont la même longitude : ainsi, ils se situent sur le même méridien. L'arc formé par ces deux villes définit un angle ayant pour centre de la terre et dont la mesure vaut :
   $45 - 4 = 41^o$
   La circonférence de la terre a pour mesure :
   $2\times\pi\times r = 2\times\pi\times 6370 \approx 40\,023{,}89 \approx 40\,024\,km$
   La proportionnalité entre l'angle au centre formé par un arc et sa longueur permet de construire le tableau de proportionnalité suivant :

Angle au centre	360	41
Longueur de l'arc	40 024	x

   D'après le produit en croix, on a :
   $360\times x = 41\times 40\,024$
   $x = \dfrac{41\times 40\,024}{360}$
   $x \approx 4\,558\,km$

   b. Les villes de Douala et de Cayenne se situe sur le même parallèle. Pour déterminer leur distance, il faut déterminer le rayon de ce parallèle. Ci-dessous est représenté la situation où D représente la ville de Doula, C la ville de Cayenne, O le centre de la terre et I le centre du parallèle contenant C et D :



   Le triangle IOC est formé du centre de la terre, du centre du parallèle et d'un point de ce parallèle, on en déduit que le triangle IOC est rectangle en I.
   Le triangle IOC est rectangle en I, on a la relation trigonométrique :
   $\sin\widehat{COI} = \dfrac{IC}{OC}$
   $\sin(96) = \dfrac{IC}{6\,370}$
   $IC = 6\,370\times\sin(96)$
   $IC \approx 6335{,}1044$
   $IC \approx 6335\,km$
   Le parallèle passant par la ville de Cayenne a pour circonférence :
   $2\times\pi\times IC = 2\times\pi\times 6335 \approx 39\,803{,}9789 \approx 39\,804\,km$
   On a le tableau de proportionnalité suivant liant la longueur d'un arc et l'angle au centre définissant cet arc de cercle :

Angle au centre	360	61
Longueur de l'arc	39 804	x

   Le produit en croix donne l'égalité :
   $360\times x = 39\,804\times 61$
   $x = \dfrac{39\,804\times 61}{360}$
   $x \approx 6\,744{,}566\,km$
   $x \approx 6\,745\,km$

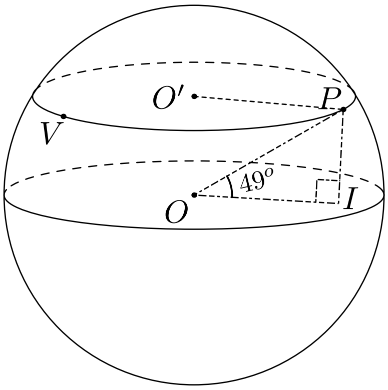
2. Non, on ne peut pas déduire la distance séparant Cayenne à Milan car les données précédemment obtenues sont des longueurs d'arc de cercle et non pas de segments : on ne peut utiliser le théorème de Pythagore

dans le pseudo-triangle formé par les villes Douala-Cayenne-Milan qui "*semblerait*" rectangle en "*Douala*".

Correction 13

1. Les informations géographiques des deux villes montrent que ces deux points sont sur la même latitude de $49^o\,N$.

2. (a.) En notant O' le centre du cercle section, on a la représentation ci-dessous :



On remarque que le rayon du cercle-section est égale à la mesure du segment $[OI]$.
Dans le triangle OPI rectangle en I, on a la relation trigonométrique suivante :

$$\cos\widehat{POI} = \frac{OI}{OP}$$
$$\cos(49) = \frac{OI}{6\,371}$$

D'après le produit en croix :

$$6\,371\times\cos(49) = OI$$
$$OI \approx 4\,180\,km$$

(b.) Ainsi, le cercle-section a un rayon mesurant $4\,180\,km$.
La longueur totale de la latitude est de :
$\mathcal{P} = 2\times\pi\times r = 2\times\pi\times 4\,180 = 26\,263\,km$

(c.) La différence des angles définissant les longétitudes montre que l'angle au centre $\widehat{PO'V}$ définissant l'arc $\overset{\frown}{VP}$ a pour mesure :
$123-2=121^o$

La proportionnalité liant la longueur d'un angle au cercle et l'angle au centre formé par cet angle permet d'obtenir la longueur séparant les villes de Paris et de Vancouver :

Mesure de l'angle au centre	360	121
Longueur de l'arc	26263	x

D'après le produit en croix, on a :

$$360\times x = 121\times 26263$$
$$x = \frac{121\times 26263}{360}$$
$$x \approx 8827\,km$$

3. La ville diamétriquement opposée à la ville de Vancouver a pour coordonnées géographiques :
$57^o\,W\ \ 49^o\,S$

Correction 14

1. Le rayon de la terre est d'environ $6\,370\,km$. On en déduit :
$OL = 6\,370\,km$

Le parallèle comprenant le point L est la section de la sphère par un plan parallèle à l'équateur et passant par le point L.

Le triangle SOL est formé du centre de la sphère, du centre du cercle-section et d'un point du cercle section : on en déduit que le triangle SOL est rectangle en S.

Dans le triangle SOL est rectangle en S, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$OL^2 = SO^2 + SL^2$$
$$6370^2 = 4880^2 + SL^2$$
$$SL^2 = 6370^2 - 4880^2$$
$$SL^2 = 40\,576\,900 - 23\,814\,400$$
$$SL^2 = 16\,762\,500$$
$$SL = \sqrt{16\,762\,500}$$
$$SL \approx 4094\,km$$

2. Dans le triangle SOL rectangle en S, on a le rapport trigonométrique suivant :

$$\cos\widehat{SOL} = \frac{OS}{OL}$$
$$\cos\widehat{SOL} = \frac{4\,880}{6\,370}$$

Les relations trigonométriques inverses donnent l'égalité :

$$\widehat{SOL} = \cos^{-1}\left(\frac{4\,880}{6\,370}\right)$$
$$\widehat{SOL} \approx 40^o$$

3. Le plan contenant le parallèle de Londres est parallèle au plan de l'équateur. Sachant que la droite (SO) est perpendiculaire au plan contenant ce parallèel, on en déduit que la droite (SO) est également perpendiculaire à l'équateur.
On en déduit que l'angle $\widehat{MOS}$ est un angle droit.
Sachant que les angles $\widehat{SOL}$ et $\widehat{LOM}$ sont adjacents, on a :

$$\widehat{SOL} + \widehat{LOM} = 90$$
$$\widehat{MOL} = 90 - \widehat{SOL}$$
$$\widehat{MOL} = 90 - 40$$
$$\widehat{MOL} = 50^o$$

Londres a pour la latitude : $50^o\,N$.