Chapitre 14 - Equation produit

Correction 1

Une video est accessible

a. L'équation $(2x-1)(3x+1)=0$ est une équation produit : Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul.
On obtient les deux équations suivantes :

$2x-1=0$	$3x+1=0$
$2x=1$	$3x=-1$
$x=\dfrac{1}{2}$	$x=-\dfrac{1}{3}$

Cette équation admet pour solution les deux nombres $-\dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{1}{2}$.

b. L'équation $(x-2)(2x+4)=0$ est une équation produit : Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul.
On obtient les deux équations suivantes :

$x-2=0$	$2x+4=0$
$x=2$	$2x=-4$
	$x=\dfrac{-4}{2}$
	$x=-2$

Cette équation admet pour solution les deux nombres -2 et 2.

c. L'équation $(3-2x)x=0$ est une équation produit : Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul.
On obtient les deux équations suivantes :

$3-2x=0$	$x=0$
$-2x=-3$	
$x=\dfrac{-3}{-2}$	
$x=\dfrac{3}{2}$	

Cette équation admet pour solution les deux nombres 0 et $\dfrac{3}{2}$.

d. L'équation $(5x+1)(5+x)=0$ est une équation produit : Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul.
On obtient les deux équations suivantes :

$5x+1=0$	$5+x=0$
$5x=-1$	$x=-5$
$x=-\dfrac{1}{5}$	

Cette équation admet pour solution les deux nombres -5 et $-\dfrac{1}{5}$.

Correction 2

1.
- $E=(4x+5)(x-2)-x(x+4)$
$=4x^2-8x+5x-10-x^2-4x$
$=3x^2-7x-10$
- $F=(3x-10)(x+1)$
$=3x^2+3x-10x-10$
$=3x^2-7x-10$

Les deux expressions E et F ont la même forme développée et réduite ; on en déduit : $E=F$

2. Les expressions E et F sont égales.
Ainsi, pour toutes valeurs de "x", E et F ont la même valeur : les "x" qui annulent E, annulent aussi F.
Recherchons alors les solutions de $F=0$

$(3x-10)(x+1)=0$
Un produit est nul si, et seulement si, un de ses facteurs est nul :

$3x-10=0$	$x+1=0$
$3x=10$	$x=-1$
$x=\dfrac{10}{3}$	

Les solutions de l'équation $E=0$ sont $\dfrac{10}{3}$ et -1

Correction 3

Une video est accessible

1. a. On a la factorisation suivante :
$$\begin{aligned}E&=(x-5)^2+(x-5)(2x+1)\\&=(x-5)(x-5)+(x-5)(2x+1)\\&=\big(x^2-5x-5x+25\big)+\big(2x^2+x-10x-5\big)\\&=\big(x^2-10x+25\big)+\big(2x^2-9x-5\big)\\&=x^2-10x+25+2x^2-9x-5\\&=3x^2-19x+20\end{aligned}$$

b. Lorsqu'on évalue cette expression pour $x=\sqrt{3}$, on a :
$3x^2-19x+20=3(\sqrt{3})^2-19\times\sqrt{3}+20$
$=9-19\sqrt{3}+20=29-19\sqrt{3}$

c. Il a eu raison car la forme développée et réduite est plus simple à évaluer ; elle est également égale avec la forme initiale entraînant la même valeur lors de l'évaluation.

2. a. Il facile de voir que la valeur 5 annule les deux termes de la somme définissant E :
$(x-5)^2=0 \quad ; \quad (x-5)(2x+1)=0$

b. On a la factorisation suivante :
$$\begin{aligned}E&=(x-5)^2+(x-5)(2x+1)\\&=(x-5)(x-5)+(x-5)(2x+1)\\&=(x-5)\big[(x-5)+(2x+1)\big]\\&=(x-5)(3x-4)\end{aligned}$$

c. Pour qu'un produit soit nul, il suffit qu'au moins un de ses facteurs soit nul ; ainsi, la seconde solution de l'équation $E=0$ est :
$3x-4=0$
$3x=4$
$x=\dfrac{4}{3}$
La seconde solution de l'équation est $\dfrac{4}{3}$.

3. Il est équivalent de prendre la forme développée ou la forme factorisée pour effectuer l'évaluation de l'expression :

- $(x-5)(3x-4) = \left(\frac{1}{9}-5\right)\left(3\times\frac{1}{9}-4\right)$
$= \left(\frac{1}{9}-\frac{45}{9}\right)\left(\frac{3}{9}-\frac{36}{9}\right) = -\frac{44}{9}\times\left(-\frac{33}{9}\right)$
$= \frac{44}{9}\times\frac{11}{3} = \frac{484}{27}$
- $3x^2-19x+20 = 3\times\left(\frac{1}{9}\right)^2 - 19\times\frac{1}{9}+20$
$= 3\times\frac{1}{81}-\frac{19}{9}+20 = \frac{1}{27}-\frac{19}{9}+20$
$= \frac{1}{27}-\frac{57}{27}+\frac{540}{27} = \frac{1-57+540}{27} = \frac{484}{27}$

Correction 4

a.
$$x^2 = 10^2$$
$$x^2-10^2 = 0$$
$$\big(x+10\big)\big(x-10\big) = 0$$
Or, un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

$x+10=0$	$x-10=0$
$x=-10$	$x=10$

Ainsi, cette équation admet pour solutions -10 et 10.

b.
$$x^2 = 9$$
$$x^2-9 = 0$$
$$x^2-3^2 = 0$$
$$\big(x+3\big)\big(x-3\big) = 0$$
Or, un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

$x+3=0$	$x-3=0$
$x=-3$	$x=3$

Ainsi, cette équation admet pour solutions -3 et 3.

c. (E) a deux solutions :
- La solution positive : $\sqrt{5}$
- La solution négative : $-\sqrt{5}$

d. (F) n'a pas de solution, car $-\sqrt{2}$ est un nombre négatif.

Correction 5

1. a. Les nombres qui ont un carré égal à 9 sont :
-3 ; 3
Les solutions de l'équation sont -3 et 3.

b. Pour que x soit tel que $(x+1)^2=9$, il faut que :

$x+1=-3$	$x+1=3$
$x=-3-1$	$x=3-1$
$x=-4$	$x=2$

L'ensemble des solutions est : $\mathcal{S}=\{-4\,;2\}$

2. Les nombres dont le carré vaut 2 sont :
$-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$
Ainsi, on obtient les deux égalités suivantes :

$x-2=-\sqrt{2}$	$x-2=\sqrt{2}$
$x=-\sqrt{2}+2$	$x=\sqrt{2}+2$

L'ensemble des solutions de cete équation est :
$\mathcal{S} = \{2-\sqrt{2}\,;2+\sqrt{2}\}$

Correction 6

1. A l'aide d'une identification avec la troisième identité remarquable, on a la factorisation :
$$I = (7x-3)^2-5^2 = \big[(7x-3)+5\big]\big[(7x-3)-5\big]$$
$$= (7x+2)(7x-8)$$

2. Résolvons l'équation :
$$I = 0$$
$$(7x+2)(7x-8) = 0$$
Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :
On obtient les deux équations suivantes :

$7x+2=0$	$7x-8=0$
$7x=-2$	$7x=8$
$x=-\frac{2}{7}$	$x=\frac{8}{7}$

Cette équation admet les deux solutions suivantes $-\frac{2}{7}$ et $\frac{8}{7}$.

Correction 7

a. On a les transformations algébriques suivantes :
$$(3x-2)(x+1)+(3x-2)(2-3x) = 0$$
$$(3x-2)\big[(x+1)+(2-3x)\big] = 0$$
$$(3x-2)(x+1+2-3x) = 0$$
$$(3x-2)(3-2x) = 0$$
Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul.
On obtient les deux équations suivantes :

$3x-2=0$	$3-2x=0$
$3x=2$	$-2x=-3$
$x=\frac{2}{3}$	$x=\frac{-3}{-2}$
	$x=\frac{3}{2}$

Cette équation admet deux solutions : $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{2}$.

b. On a les transformations algébriques suivantes :
$$(x+1)(2-x)-(x+1)(2x+5) = 0$$
$$(x+1)\big[(2-x)-(2x+5)\big] = 0$$
$$(x+1)(2-x-2x-5) = 0$$
$$(x+1)(-3x-3) = 0$$
Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul.
On obtient les deux équations suivantes :

$x+1=0$	$-3x-3=0$
$x=-1$	$-3x=3$
	$x=\frac{3}{-3}$
	$x=-1$

Cette équation admet une unique solution : -1.

c. On a les transformations algébriques suivantes :
$$(3-2x)(x+1) = 3(3-2x)$$
$$(3-2x)(x+1)-3(3-2x) = 0$$
$$(3-2x)\big[(x+1)-3\big] = 0$$
$$(3-2x)(x+1-3) = 0$$
$$(3-2x)(x-2) = 0$$
Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul.
On obtient les deux équations suivantes :

$$\begin{array}{r|l} 3-2x=0 & x-2=0 \\ -2x=-3 & x=2 \\ x=\dfrac{-3}{-2} & \\ x=\dfrac{3}{2} & \end{array}$$

Cette équation admet deux solutions : $\dfrac{3}{2}$ et 2.

d. $$(2-3x)(x+4)-(2-3x)(x+2)=0$$
$$(2-3x)\big[(x+4)-(x+2)\big]=0$$
$$(2-3x)(x+4-x-2)=0$$
$$(2-3x)2=0$$
Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul.
On obtient l'équation suivante :
$$2-3x=0$$
$$-3x=-2$$
$$x=\frac{-2}{-3}$$
$$x=\frac{2}{3}$$
Cette équation admet pour solution le nombre $\dfrac{2}{3}$.

Correction 8

a. Factorisons le membre de gauche afin d'obtenir un produit nul :
$$(3x+1)(x-1)-(x-1)^2=0$$
$$(x-1)\big[(3x+1)-(x-1)\big]=0$$
$$(x-1)\big[3x+1-x+1\big]=0$$
$$(x-1)(2x+2)=0$$
Un produit est nul si, et seulement si, un des facteurs est nul :
On obtient les deux équations suivantes :
$$\begin{array}{r|l} x-1=0 & 2x+2=0 \\ x=1 & 2x=-2 \\ & x=-\dfrac{2}{2} \\ & x=-1 \end{array}$$
Les solutions de l'équations sont -1 et 1.

b. Essayons de modifier cette égalité afin d'obtenir un produit nul :
$$(2x-1)^2=(2x-1)(4x+7)$$
$$(2x-1)^2-(2x-1)(4x+7)=0$$
$$(2x-1)\big[(2x-1)-(4x+7)\big]=0$$
$$(2x-1)\big[2x-1-4x-7\big]=0$$
$$(2x-1)(-2x-8)=0$$
Un produit est nul si, et seulement si, un des facteurs est nul :
On obtient les deux équations suivantes :
$$\begin{array}{r|l} 2x-1=0 & -2x-8=0 \\ 2x=1 & -2x=8 \\ x=\dfrac{1}{2} & x=\dfrac{8}{-2} \\ & x=-4 \end{array}$$
Les solutions de l'équation sont -4 et $\dfrac{1}{2}$

c. On a les transformations algébriques suivantes :
$$(5x+1)(x-2)=(5x+1)^2$$
$$(5x+1)(x-2)-(5x+1)^2=0$$
$$(5x+1)(x-2)-(5x+1)(5x+1)=0$$
$$(5x+1)\big[(x-2)-(5x+1)\big]=0$$
$$(5x+1)(x-2-5x-1)=0$$
$$(5x+1)(-4x-3)=0$$
Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul.
On obtient les deux équations suivantes :
$$\begin{array}{r|l} 5x+1=0 & -4x-3=0 \\ 5x=-1 & -4x=3 \\ x=-\dfrac{1}{5} & x=-\dfrac{3}{4} \end{array}$$
Cette équation admet deux solutions : $-\dfrac{3}{4}$ et $-\dfrac{1}{5}$.

d. $$(x-2)(2x+1)=(x-2)^2$$
$$(x-2)(2x+1)-(x-2)^2=0$$
$$(x-2)\big[(2x+1)-(x-2)\big]=0$$
$$(x-2)(2x+1-x+2)=0$$
$$(x-2)(x+3)=0$$
Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul.
On obtient les deux équations suivantes :
$$\begin{array}{rcl} x-2=0 & ; & x+3=0 \\ x=2 & & x=-3 \end{array}$$
Cette équation admet pour solution les deux nombres -3 et 2.

Correction 9

On donne l'expression : $A=(x-3)(x+3)-2(x-3)$

1. $A=(x-3)(x+3)-2(x-3)=(x-3)\big[(x+3)-2\big]$
$=(x-3)(x+3-2)=(x-3)(x+1)$
$A=(x-3)(x+3)-2(x-3)=(x^2-9)-(2x-6)$
$=x^2-9-2x+6=x^2-2x-3$
Pour $x=-1$, en prenant la forme factorisée, on a :
$(x-3)(x+1)=(-1-3)(-1+1)=-4\times 0=0$
Pour $x=0$, en prenant la forme développée, on a :
$A=x^2-2x-3=0^2-2\times 0-3=-3$

2. Résolvons l'équation : $(x-3)(x+1)=0$:
Un produit est nul si, et seulement si, un de ses facteurs est nul :
$$\begin{array}{r|l} x-3=0 & x+1=0 \\ x=3 & x=-1 \end{array}$$
Les solutions de l'équation sont 3 et -1.

Correction 10

1. On a :
$$E=(x+1)^2+(x+1)(2x-3)$$
$$=(x+1)(x+1)+(2x^2-3x+2x-3)$$
$$=(x^2+x+x+1)+(2x^2-x-3)$$
$$=(x^2+2x+1)+(2x^2-x-3)$$
$$=3x^2+x-2$$

2. On a :

$$E = (x+1)^2 + (x+1)(2x-3)$$
$$= (x+1)(x+1) + (x+1)(2x-3)$$
$$= (x+1)\big[(x+1)+(2x-3)\big]$$
$$= (x+1)(3x-2)$$

3. Pour résoudre l'équation $(x+1)(3x-2)=0$, on utilise la propriété suivante :
Si un produit est nul, alors au moins un de ses facteurs est nul :

$x+1=0$	$3x-2=0$
$x=-1$	$3x=2$
$x=-1$	$x=\dfrac{2}{3}$

Les solutions de l'équation sont -1 et $\dfrac{2}{3}$.

Correction 11

1. $C = (2x+5)^2 - (x+3)(2x+5)$
$$= (2x+5)(2x+5) - (2x^2+5x+6x+15)$$
$$= (4x^2+10x+10x+25) - 2x^2 - 5x - 6x - 15$$
$$= (4x^2+20x+25) - 2x^2 - 5x - 6x - 15$$
$$= 2x^2 + 9x + 10$$

2. On remarque que dans l'expression :
$C = (2x+5)^2 - (x+3)(2x+5)$
Mettons en facteur $(2x+5)$
$$= (2x+5)^2 - (x+3)(2x+5)$$
$$= (2x+5)\big[(2x+5)-(x+3)\big]$$
$$= (2x+5)\big(2x+5-x-3\big)$$
$$= (2x+5)(x+2)$$

3. Résolvons l'équation :
$(2x+5)(x+2) = 0$
Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ces facteurs est nul.

$2x+5=0$	$x+2=0$
$2x=-5$	$x=-2$
$x=-\dfrac{2}{5}$	

Donc, les solutions de l'équation sont : $-\dfrac{5}{2}$ et -2

4. Pour évaluer l'expression en $x=-\dfrac{2}{3}$, on a :
$$C = 2x^2 + 9x + 25 = 2\times\Big(-\frac{2}{3}\Big)^2 + 9\times\Big(-\frac{2}{3}\Big) + 10$$
$$= 2\times\frac{4}{9} - \frac{18}{3} + 10 = \frac{8}{9} - \frac{54}{9} + 10$$
$$= \frac{8}{9} - \frac{54}{9} + \frac{90}{9} = \frac{8-54+90}{9} = \frac{44}{9}$$
Cette fraction est sous la forme irréductible car 44 n'est pas divisible par 3.

Correction 12

1. a. On a le développement suivant :
$$A = (x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2$$
$$= (x-1)(x-1) + x^2 + (x+1)(x+1)$$
$$= (x^2-x-x+1) + x^2 + (x^2+x+x+1)$$
$$= (x^2-2x+1) + x^2 + (x^2+2x+1)$$
$$= 3x^2 + 2$$

b. Pour que la somme des trois entiers positifs consécutifs $(x-1)$, x, $(x+1)$ soit égale à 1325, il faut que le nombre A vérifie l'égalité :
$$A = 1325$$
$$3x^2 + 2 = 1325$$
$$3x^2 = 1325 - 2$$
$$3x^2 = 1323$$
$$x^2 = \frac{1323}{3}$$
$$x^2 = 441$$
x étant un nombre positif :
$$x = \sqrt{441}$$
$$x = 21$$
Ainsi, les trois entiers positifs et consécutifs ayant la somme de ses carrés égale à 1325 sont :
20 ; 21 ; 22

2. a. Factorisons B :
$B = 9x^2 - 64 = (3x)^2 - 8^2$
On factorise avec la troisième identité remarquable :
$$= (3x+8)(3x-8)$$

b. Le nombre x recherché vérifie l'équation :
$$(3x)^2 = 64$$
$$9x^2 = 64$$
$$9x^2 - 64 = 0$$
D'après la question précédente :
$(3x+8)(3x-8) = 0$
Un produit es nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul.
On obtient les deux équations suivantes :

$3x-8=0$	$3x+8=0$
$3x=8$	$3x=-8$
$x=\dfrac{8}{3}$	$x=-\dfrac{8}{3}$

Ains, les deux nombres relatifs dont le carré du triple est égal à 64 sont :
$-\dfrac{8}{3}$; $\dfrac{8}{3}$

Correction 13

1. a. $10 \to 10 - 0{,}5 = 9{,}5 \to 9{,}5\times 20 = 190$.

b. $10 \to 10^2 = 100 \to 2\times 100 = 200 \to 200 - 10 = 190$

2. a. `=A2^2*2-A2`

b. Il semble que les deux programmes conduisent au même résultat.

c.
- Voici les étapes de construction du programme A :
$x \to x - 0{,}5 \to (x-0{,}5)\times 2x$
On a le développement :
$(x-0{,}5)\times 2x = 2x(x-0{,}5) = 2x^2 - x$.
- Voici les étapes de construction du programme B :
$x \to x^2 \to 2\times x^2 \to 2x^2 - x$

Les deux programmes donnent le même résultat : le double du carré du nombre initial auquel on retranche le nombre initial.

3. Pour déterminer les valeurs initiales à choisir, résolvons l'équation :
$$2x^2 - x = 0$$
$$x(2x-1) = 0$$
Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

$$\begin{array}{l|l} x=0 & 2x-1=0 \\ & 2x=1 \\ & x=0{,}5 \end{array}$$

Ainsi, deux nombres sont solutions du problème :
0 et $0{,}5$

Correction 14

1. a. Voici les différentes étapes effectuées par ce programme de calcul :
$$4 \rightsquigarrow 4+1$$
$$5 \rightsquigarrow 5^2$$
$$25 \rightsquigarrow 25-16=9$$

b. Voici les différentes étapes effectuées par ce programme de calcul :
$$-1 \rightsquigarrow -1+1$$
$$0 \rightsquigarrow 0^2$$
$$0 \rightsquigarrow -16$$
Alors, le résultat obtenu est -16.

c. En prenant x comme nombre de départ, on a :
$$x \rightsquigarrow x+1$$
$$x+1 \rightsquigarrow (x+1)^2$$
$$(x+1)^2 \rightsquigarrow (x+1)^2-16$$
On a le développement :
$$(x+1)^2-16 = x^2+2\times x\times 1+1^1-16$$
$$= x^2+2x-15$$

2. a. Développons l'expression :
$$(x-3)(x+5) = x^2+5x-3x-15$$
$$= x^2+2x-15 = P$$

b. Pour le résultat final soit 0, il faut que le nombre x choisi vérifie :
$$P=0$$
$$(x-3)(x+5)=0$$
Or, un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :
$$\begin{array}{r|r} x-3=0 & x+5=0 \\ x=3 & x=-5 \end{array}$$
Ainsi, on peut choisir l'un des nombres parmi -5 et 3 pour avoir le résultat qui vaille 0.

Correction 15

1. a. En choisissant 5 comme nombre de départ, la transformation est :
$$5 \rightsquigarrow 5\times 3=15 \rightsquigarrow 15+1=16$$

b. En choisissant 5 comme nombre de départ, la transformation est :
$$\left.\begin{array}{l} 5 \rightsquigarrow 5-1=4 \\ 5 \rightsquigarrow 5+2=7 \end{array}\right\} \rightsquigarrow \quad 4\times 7=28$$

2. a. $A(x)=3x+1$

b. Résolvons l'équation :
$$A(x)=0$$
$$3x+1=0$$
$$3x=-1$$
$$x=-\frac{1}{3}$$

3. Développons l'expression :
$$B(x)=(x-1)(x+2)=x^2+2x-x-2=x^2+x-2$$

4. a. Développons ces deux expressions :

- $B(x)-A(x) = (x^2+x-2)-(3x+1) = x^2+x-2-3x-1 = x^2-2x-3$
- $(x+1)(x-3) = x^2-3x+x-3 = x^2-2x-3$

On en déduit l'égalité : $B(x)-A(x)=(x+1)(x-3)$

b. Soit x un nombre de départ donnant la même valeur de sortie. Ce nombre vérifie l'équation :
$$B(x)=A(x)$$
$$B(x)-A(x)=0$$
$$(x+1)(x-3)=0$$
Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul.
$$\begin{array}{r|r} x+1=0 & x-3=0 \\ x=-1 & x=3 \end{array}$$
On en déduit qu'il faut choisir comme nombre de départ -1 ou 3.

Correction 16

1. a. Le triangle CDE étant rectangle en D, l'aire du triangle CDE est égale à :
$$\mathcal{A}_1 = \frac{DE\times DC}{2} = \frac{(x+3)(x+3)}{2}$$

b. L'aire du rectangle $ABCD$ admet pour expression en fonction de x :
$$\mathcal{A}_2 = AB\times AD = 2(x+3)$$

2. a. On a les transformations algébriques :
$$2\times\mathcal{A}_1-2\times\mathcal{A}_2 = 2\times\frac{(x+3)(x+3)}{2}-2\times 2(x+3)$$
$$=(x+3)(x+3)-4(x+3)=(x+3)\big[(x+3)-4\big]$$
$$=(x+3)(x-1)$$

b. Résolvons l'équation :
$$\mathcal{A}_1=\mathcal{A}_2$$
En multipliant les deux membres par 2 :
$$2\times\mathcal{A}_1=2\times\mathcal{A}_2$$
$$2\times\mathcal{A}_1-2\times\mathcal{A}_2=0$$
Par la question précédente :
$$(x+3)(x-1)=0$$
Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :
$$\begin{array}{r|r} x+3=0 & x-1=0 \\ x=-3 & x=1 \end{array}$$
Cette équation a deux solutions, mais comme x est un nombre positif, on en déduit que l'aire du rectangle $ABCD$ est égale à l'aire du triangle CDE lorsque : $=1$

Correction 17

1. Le point N appartenant au segment $[AC]$, on a l'égalité des longueurs :
$$AC=AN+NC$$
qui permet d'obtenir l'expression de la longueur $[AC]$:
$$=(x+2)+x=2x+2$$

2. On a $M\in[AB]$; $N\in[AC]$; $(MN)/\!/(BC)$
D'après le théorème de Thalès, on a l'égalité suivante :
$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$
Utilisons l'égalité suivante :
$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$$
$$\frac{3}{5}=\frac{x+2}{2x+2}$$

3. Résolvons l'équation de la question 2. :

$$\frac{3}{5} = \frac{x+2}{2x+2}$$

D'après le produit en croix :

$$\begin{aligned} 3\times(2x+2) &= 5\times(x+2) \\ 6x+6 &= 5x+10 \\ 6x+6-6 &= 5x+10-6 \\ 6x &= 5x+4 \\ 6x-5x &= 5x+4-5x \\ x &= 4\,cm \end{aligned}$$

On en déduit que la longueur du segment $[AC]$:

$AC = 2x+2 = 2\times4+2 = 8+2 = 10\,cm$

Correction 18

1. Pour $x{=}4$, on a :

   $AB = x{+}8 = 4{+}8 = 12 \quad ; \quad AC = x{+}7 = 4{+}7 = 11$

   Pour montrer que le triangle ABC n'est pas un triangle rectangle, il faut utiliser la contraposé du théorème de Pythagore ou alors un raisonnement par l'absurde :

   - Supposons que le triangle ABC est rectangle. Le côté ayant la mesure la plus grande est AB. Ainsi, ABC est rectangle en C.
     D'après le théorème de Pythagore, on a :
     $AB^2 = AC^2 + BC^2$.
     Or, on a :
     $AB^2 = 144 \quad ; \quad AC^2 = 121 \quad ; \quad BC^2 = 25$
     Ce qui donne : $AB^2 {\neq} AC^2{+}BC^2$.
     On a abouti à une contradiction. L'hypothèse de départ est donc fausse : le triangle ABC ne peut être rectangle.

2. - $(x+7)^2 = (x+7)(x+7) = x^2+7x+7x+49$
     $= x^2+14x+49$
   - $(x+8)^2 = (x+8)(x+8) = x^2+8x+8x+64$
     $= x^2+16x+64$

   On a :

   $AB^2 - AC^2 = (x+8)^2 - (x+7)^2$

   $= (x^2+14x+49) - (x^2+16x+64) = 2x+15$

   - Pour $x{=}0$, on a :
     $AB^2 - AC^2 = 2\times0+15 = 15.$
   - Pour $x{=}10$, on a :
     $AB^2 - AC^2 = 2\times10+15 = 35$

   La longueur de $[BC]$ ne dépend pas de la valeur de x, il en est de même de la valeur BC^2.

3. a. $$\begin{aligned} 2x+15 &= 25 \\ 2x &= 10 \\ x &= \frac{10}{2} \\ x &= 5 \end{aligned}$$

   L'équation a pour solution 5.

   b. Pour $x{=}5$, on a :

   $$\begin{aligned} 2x+15 &= 25 \\ AB^2 - AC^2 &= 25 \\ AB^2 - AC^2 &= BC^2 \\ AB^2 &= BC^2 + AC^2 \end{aligned}$$

   D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en C.