Chapitre 14 - Equation produit

Exercice 1

Résoudre les équations suivantes :

a. $(2x-1)(3x+1)=0$ b. $(x-2)(2x+4)=0$

c. $(3-2x)x=0$ d. $(5x+1)(5+x)=0$

Exercice 2

On considère les expressions :

$$E=(4x+5)(x-2)-x(x+4) \quad ; \quad F=(3x-10)(x+1)$$

1. En développant et réduisant les expressions E et F, montrer que : $E=F$.
2. En déduire les solutions de l'équation : $E=0$.

Exercice 3*

On donne l'expression : $E=(x-5)^2+(x-5)(2x+1)$

1. Pour calculer la valeur exacte de E lorsque $x=\sqrt{3}$, Marc a choisi de développer E.
   a. Quelle expression obtient-il?
   b. Calculer la valeur exacte de E lorsque $x=\sqrt{3}$.
   c. Marc a-t-il eu raison de développer E? Pourquoi?
2. a. Léa a trouvé mentalement une solution de l'équation $E=0$. A votre avis, laquelle?
   b. Pour trouver l'autre solution, Léa choisit de factoriser E. Montrer que : $E=(x-5)(3x-4)$.
   c. Donner, alors la seconde solution de l'équation $E=0$.
3. Lorsque $x=\dfrac{1}{9}$, choisir la forme de E qui vous paraît la plus adaptée pour calculer la valeur exacte de E sous forme de fraction irréductible. Faire ce calcul.

Exercice 4

Résoudre les équations suivantes :

a. $x^2=10^2$ b. $x^2=9$

c. $x^2=5$ d. $x^2=-\sqrt{2}$

Exercice 5*

1. a. Donner tous les nombres qui ont un carrée égal à 9. Quels sont les solutions de l'équation $x^2=9$?
   b. En déduire les solutions de l'équation : $(x+1)^2=9$
2. Par un raisonnement similaire, résoudre l'équation : $(x-2)^2=2$

Exercice 6

On pose : $I=(7x-3)^2-5^2$.

1. Factoriser I.
2. Résoudre l'équation $I=0$.

Exercice 7

Résoudre les équations ci-dessous. Pour cela, utiliser une factorisation pour obtenir une équation produit nulle.

a. $(3x-2)(x+1)+(3x-2)(2-3x)=0$

b. $(x+1)(2-x)-(x+1)(2x+5)=0$

c. $(3-2x)(x+1)=3(3-2x)$

d. $(2-3x)(x+4)-(2-3x)(x+2)=0$

Exercice 8

Modifier les équations proposées afin d'obtenir des produits nuls, puis les résoudre :

a. $(3x+1)(x-1)-(x-1)^2=0$

b. $(2x-1)^2=(2x-1)(4x+7)$

c. $(5x+1)(x-2)=(5x+1)^2$

d. $(x-2)(2x+1)=(x-2)^2$

Exercice 9*

On donne l'expression : $A=(x-3)(x+3)-2(x-3)$

1. Factoriser A.
2. Développer et réduire A.
3. En choisissant l'expression de A la plus adaptée parmi celles trouvées aux questions 1 et 2, déterminer la valeur de A pour $x=-1$ et pour $x=0$.
4. Résoudre l'équation : $(x-3)(x+1)=0$

Exercice 10

Soit l'expression : $E=(x+1)^2+(x+1)(2x-3)$

1. Développer puis réduire l'expression E.
2. Factoriser l'expression E.
3. Résoudre l'équation : $(x+1)(3x-2)=0$

Exercice 11*

On considère l'expression : $C=(2x+5)^2-(x+3)(2x+5)$

1. Développer et réduire C.
2. Factoriser C.
3. Résoudre l'équation : $(2x+5)(x+2)=0$
4. Calculer l'expression C pour $x=-\dfrac{2}{3}$

Exercice 12*

1. On pose : $A=(x-1)^2+x^2+(x+1)^2$
   a. Développer et réduire A.
   b. Déterminer trois nombres entiers positifs consécutifs, $(x-1)$, x et $(x+1)$ dont la somme des carrés est 1 325.
2. On pose : $B=9x^2-64$.
   a. Factoriser B.
   b. Déterminer les deux nombres relatifs dont le carré du triple est égal à 64.

Exercice 13

On considère ces deux programmes de calcul :

Programme A :

Choisir un nombre.
Soustraire 0,5.
Multiplier le résultat par le double du nombre choisi au départ.

Programme B :

Choisir un nombre.
Calculer son carré.
Multiplier le résultat par 2.
Soustraire à ce nouveau résultat le nombre choisi au départ.

1. a. Montrer que si on applique le programme A au nombre 10, le résultat est 190.

   b. Appliquer le programme B au nombre 10.

2. On a utilisé un tableur pour calculer des résultats de ces deux programmes. Voici ce qu'on a obtenu :

	A	B	C
1	Nombre choisi	Programme A	Programme B
2	1	1	1
3	2	6	6
4	3	15	15
5	4	28	28
6	5	45	45
7	6	66	66

   a. Quelle formule a-t-on saisie dans la cellule `C2` puis recopiée vers le bas?

   b. Quelle conjecture peut-on faire à la lecture de ce tableau?

   c. Prouver cette conjecture.

3. Quels sont les deux nombres à choisir au départ pour obtenir 0 à l'issue de ces programmes?

Exercice 14

On donne le programme de calcul suivant :

- Choisir un nombre
- Lui ajouter 1.
- Calculer le carré de cette somme.
- Enlever 16 au résultat obtenu.

1. a. Vérifier que, lorsque le nombre de départ est 4, on obtient comme résultat 9.

   b. Lorsque le nombre de départ est (-1), quel résultat obtient-on?

On appelle P cette expression.

   c. Vérifier que : $P = x^2 + 2x - 15$

2. a. Vérifier que : $(x-3)(x+5) = P$.

   b. Quels nombres peut-on choisir au départ pour que le résultat final soit 0? Justifier votre réponse.

Exercice 15*

Voici deux programmes de calcul :

Programme 1

Choisir un nombre
Le multiplier par 3
Ajouter 1

Programme 2

Choisir un nombre
→ Soustraire 1 ; → Ajouter 2
→ Multiplier les deux nombres

1. Vérifier que si on choisit 5 comme nombre de départ :

   a. le résultat du programme 1 vaut 16.

   b. le résultat du programme 2 vaut 28.

On appelle $A(x)$ le résultat du programme 1 en fonction du nombre x choisi au départ.
La fonction $B : x \longrightarrow (x-1)(x+2)$ donne le résultat du programme 2 en fonction du nombre x choisi au départ.

2. a. Exprimer $A(x)$ en fonction de x.

   b. Déterminer le nombre que l'on doit choisir au départ pour obtenir 0 comme résultat du programme 1.

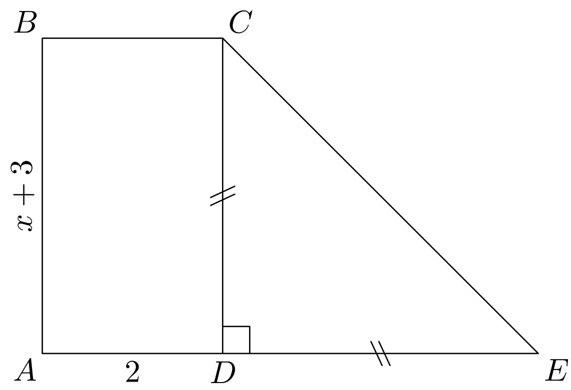
3. Développer et réduire l'expression :
   $B(x) = (x-1)(x+2)$

4. a. Montrer que : $B(x) - A(x) = (x+1)(x-3)$

   b. Quels nombres doit-on choisir au départ pour que le programme 1 et le programme 2 donnent le même résultat? Expliquer la démarche.

Exercice 16

On considère la figure ci-dessous composée du rectangle $ABCD$ et du triangle CDE rectangle isocèle en D :



Les dimensions sont indiqués sur la figure où x est un nombre positif.

1. a. Exprimer l'aire $\mathcal{A}_1$ du triangle CDE en fonction de x.

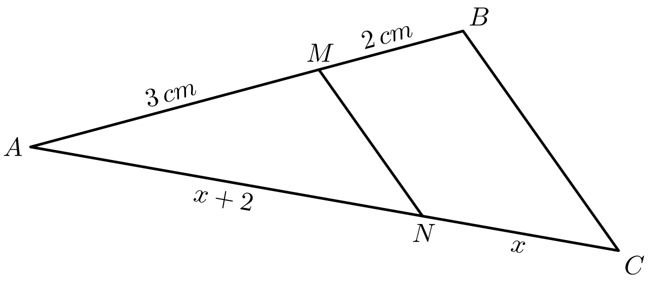
   b. Exprimer l'aire $\mathcal{A}_2$ du rectangle $ABCD$ en fonction de x.

2. a. Montrer que : $2\times\mathcal{A}_1 - 2\times\mathcal{A}_2 = \big(x+3\big)\big(x-1\big)$

   b. Déterminer les valeurs possibles de x afin que l'aire du rectangle $ABCD$ soit égale à l'aire du triangle CDE.

Exercice 17

On considère un triangle ABC où M et N appartiennent respectivement aux segments $[AB]$ et $[AC]$ tels que les droites (MN) et (BC) sont parallèles.



Les mesures sont portées sur la figure où x est un nombre inconnu.

1. Déterminer la longueur du segment $[AC]$ en fonction de x.

2. Montrer que le nombre x vérifie l'égalité :
$$\frac{x+2}{2x+2} = \frac{3}{5}$$

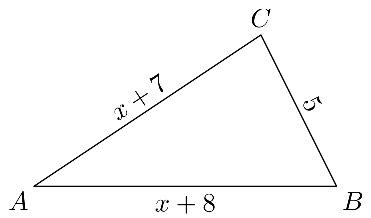
3. Déterminer la mesure du segment $[AC]$.

Indication : on résoudra l'équation obtenue à la question 2. à l'aide d'un produit en croix.

Exercice 18*

x est un nombre positif compris entre 0 et 10 ; les longueurs sont exprimées en cm et les aires en cm^2

La figure ci-dessous est effectuée à main levée. Il s'agit de savoir s'il existe une valeur de x pour laquelle ABC est un triangle rectangle.



1. Calculer AB et AC lorsque $x=4$. Lorsque $x=4$, ABC est-il rectangle ? Justifier la réponse.

2. Développer et réduire : $(x+7)^2$; $(x+8)^2$

   En déduire : $AB^2-AC^2=2x+15$

   Quelle est la valeur de AB^2-AC^2 lorsque $x=0$, lorsque $x=10$?
   La valeur de BC^2 dépend-elle du nombre x ?

3. a. Résoudre l'équation : $2x+15=25$.

   b. En déduire la valeur de x, afin que le triangle ABC soit rectangle en C. Justifier votre résultat.

